

WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER
FACHBEREICH MATHEMATIK UND INFORMATIK

Isomorphismusvermutungen und 3-Mannigfaltigkeiten

Diplomarbeit

vorgelegt von

Philipp Kühl

September 2008

Betreuer: Prof. Dr. Wolfgang Lück
Zweitgutachter: Prof. Dr. Arthur Bartels

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Münster, 5. Juli 2009

Einleitung

Roushon hat in [R1] und [R2] eine umfassende Sammlung von Resultaten zusammengestellt, die sich mit Fundamentalgruppen von dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten und der Farrell-Jones-Isomorphismusvermutung beschäftigen. Sein Hauptaugenmerk lag dabei auf der Farrell-Jones-Isomorphismusvermutung bezüglich des stabilen topologischen Pseudo-Isotopie-Funktors. Wir wollen uns dieser Thematik abweichend von der ursprünglichen Definition von Farrell-Jones [FJ] mit einer allgemeineren Formulierung mit Hilfe von äquivarianten Homologietheorien nähern, die beispielsweise auch die Baum-Connes-Vermutung mit einschließt. Eine ausführliche Einführung in diese Konstruktion findet sich bei Lück und Reich [LR]. Wir werden mit einer erweiterten Form der dort definierten gefaserten Isomorphismusvermutung arbeiten, die bezüglich endlichen Erweiterungen gute Vererbungseigenschaften hat.

Die vorliegende Arbeit kristallisiert aus den Ergebnissen von Roushon die Voraussetzungen heraus, die solch eine beliebige „endlich erweiterbare, gefaserte Isomorphismusvermutung“ erfüllen muss, damit sie für Fundamentalgruppen von beliebigen dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten gilt. Ein besonderes Augenmerk wird dabei auf der Farrell-Jones-Isomorphismusvermutung in L-Theorie und algebraischer K-Theorie liegen, da sie bereits einige Ergebnisse mitbringt (siehe beispielsweise [BLR]), die die nötigen Voraussetzungen dafür erheblich einschränken.

Das erste Kapitel, „Das Fundament“ auf dem diese Arbeit ruht, besteht aus den benötigten Grundlagen über dreidimensionale Mannigfaltigkeiten und Kranzprodukten von Gruppen. Für die Klassifikation von dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten spielen zwei Zerlegungen eine wichtige Rolle: Die Zerlegung entlang von Sphären, die als Primzerlegung bekannt ist und auf Kneser [Kn] zurückgeht, und die Zerlegung entlang von Tori, die Jaco-Shalen [JS] und Johannson [Jo] entwickelt haben. Wir geben im ersten Teil des Kapitels einen kurzen Überblick über diese beiden Zerlegungen und gehen im zweiten Teil auf die grundlegenden Eigenschaften von Kranzprodukten von Gruppen ein, die uns bei dem Umgang mit endlichen Erweiterungen bzw. endlichen Überlagerungen nützliche Dienste leisten werden.

Das zweite Kapitel führt kurz und knapp die Definitionen der Isomorphismusvermutungen ein, zu denen im dritten Kapitel, dem „FIC-Werkzeugkasten“ dann alle Aussagen zusammengestellt werden, die wir über Isomorphismusvermutungen brau-

chen werden. Die „Schraubenzieher“ sind dabei relativ grundlegende, allgemeine Ergebnisse, während wir mit den „Bohrmaschinen“ fünf Aussagen aufstellen, deren Gültigkeit wir von einer Isomorphismusvermutung fordern müssen, damit sie für Fundamentalgruppen von dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten gilt. Sie sind mit W1 bis W5 durchnummeriert und können abhängig von der betrachteten Isomorphismusvermutung noch vereinfacht oder teilweise sogar bewiesen werden. Für die Farrell-Jones-Isomorphismusvermutung in L-Theorie und algebraischer K-Theorie bleibt dabei vor allem W1 - die Gültigkeit für Gruppen der Gestalt $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}$ - als entscheidende Voraussetzung bzw. Hindernis bestehen.

Wenn wir W1 bis W5 als gegeben voraussetzen, können wir die Werkzeuge W3 bis W5 ohne Einschränkung zu allgemeineren Aussagen verschärfen, mit *W3 bis *W5 bezeichnet, und außerdem vier weitere wichtige „Bohrmaschinen“ - *W6 bis *W9 - beweisen. Im Anhang sind zur Übersicht noch einmal alle „Bohrmaschinen“ aufgelistet.

Als letztes Kapitel schließlich führt „Der rote Baum“ als verzweigter roter Faden in mehreren Etappen durch den Beweis unseres Zielsatzes:

Zielsatz. *Eine endlich erweiterbare, gefaserte Isomorphismusvermutung, die die Anforderungen W1 bis W5 erfüllt, gilt für Fundamentalgruppen von dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten.*

Die grundlegende Voraussetzung dafür, die mit W2 gefordert wird, ist, dass die Isomorphismusvermutung für nicht-positiv gekrümmte Mannigfaltigkeiten gilt. Das verhilft uns zu den zwei wichtigsten Resultaten, auf denen alles weitere aufbaut: Die Gültigkeit für Fundamentalgruppen von geschlossenen Seifert-Mannigfaltigkeiten und von geschlossenen Haken-Mannigfaltigkeiten mit atorischer Komponente. Im „Mit-Rand-Ast“-Kapitel werden wir Mannigfaltigkeiten mit Rand auf diese beiden Resultate zurückführen. Vor allem bei Mannigfaltigkeiten mit Randkomponenten vom Geschlecht ≥ 2 stellen sich dabei etwas größere Schwierigkeiten in den Weg, über die auch Roushon ins Stolpern gekommen ist. Wir werden im Abschnitt „B-Gruppen“ neben Roushons zweifelhaftem noch einen alternativen Beweis für diese Klasse von Mannigfaltigkeiten ausführen. Im letzten Abschnitt bleiben schließlich nur noch geschlossene Graph-Mannigfaltigkeiten übrig, für deren Fundamentalgruppen mit Hilfe des Hauptsatzes aus [R1] die Isomorphismusvermutung gezeigt und damit der Beweis vollendet wird.

Inhaltsverzeichnis

1	Das Fundament	1
1.1	Zerlegung von 3-Mannigfaltigkeiten	1
1.2	Kranzprodukt	5
2	Isomorphismusvermutungen	13
3	FIC-Werkzeugkasten	17
3.1	Schraubenzieher	17
3.2	Bohrmaschinen	21
3.2.1	Die *-Werkzeuge	24
4	Der rote Baum	33
4.1	Die Wurzel	33
4.2	Ohne-Rand-Ast	36
4.3	Mit-Rand-Ast	39
4.3.1	B-Gruppen	44
4.4	Graph-Mannigfaltigkeiten-Ast	53
A	Werkzeugübersicht	59

1 Das Fundament

Wir beginnen mit der Klärung von Bezeichnungen und der Einführung von sämtlichen grundlegenden Eigenschaften von dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten und Kranzprodukten von Gruppen, die wir im Folgenden brauchen werden.

1.1 Zerlegung von 3-Mannigfaltigkeiten

Sei $D^d := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d x_i^2 \leq 1\}$ die d -dimensionale Einheitskugel bzw. d -Disk, $S^d := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \sum_{i=1}^{d+1} x_i^2 = 1\}$ die d -dimensionale Sphäre und $T^d := \prod_{i=1}^d S^1$ der d -dimensionale Torus. $S^1 \times [0, 1]$ bezeichnen wir als *Annulus*.

3-Mannigfaltigkeit wird als Abkürzung für dreidimensionale Mannigfaltigkeit verwendet. Wenn im Folgenden von Mannigfaltigkeitsgruppen die Rede ist, sind immer die Fundamentalgruppen der Mannigfaltigkeiten gemeint. Des Weiteren verstehen wir in der gesamten Arbeit unter der Bezeichnung *Mannigfaltigkeit mit Rand* oder *berandete Mannigfaltigkeit* den Spezialfall von Mannigfaltigkeiten mit leerem Rand als ausgeschlossen. Eine *geschlossene Mannigfaltigkeit* ist eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand.

Wir werden häufiger eine berandete Mannigfaltigkeit mit einer Kopie am Rand identifizieren, um eine geschlossene Mannigfaltigkeit zu erhalten. Wir nennen diesen Vorgang *Verdoppeln* und schreiben für die Verdopplung \widetilde{M} einer Mannigfaltigkeit M

$$\widetilde{M} = M \cup_{\partial} M$$

bzw. wenn wir auf einer Randfläche nicht mit der Identität sondern einem Homöomorphismus f verkleben

$$\widetilde{M} = M \cup_f M.$$

Für die Klassifikation von 3-Mannigfaltigkeiten hat man in den vergangenen 80 Jahren Zerlegungen entlang von Sphären und Tori entwickelt und studiert. Wir werden beide Zerlegungen benötigen und deshalb im Folgenden die Grundzüge und notwendigen Begriffe kurz zusammenfassen.

Seien M, M_1, M_2 zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeiten mit 3-Disks $D_i \subset \mathring{M}_i$ und Einbettungen $h_i : M_i \setminus \mathring{D}_i \rightarrow M$ für $i = 1, 2$, so dass

$$h_1(M_1 \setminus \mathring{D}_1) \cap h_2(M_2 \setminus \mathring{D}_2) = h_1(\partial D_1) = h_2(\partial D_2)$$

und

$$M = h_1(M_1 \setminus \mathring{D}_1) \cup h_2(M_2 \setminus \mathring{D}_2)$$

gilt. Wir nennen M dann die zusammenhängende Summe von M_1 und M_2 und schreiben dafür $M = M_1 \# M_2$. Sie ist eindeutig bis auf Homöomorphie, wenn M , M_1 und M_2 orientiert sind und wir fordern, dass h_1 und h_2 orientierungserhaltend sind.

Definition 1.1 (prim). Eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit M heißt *prim*, wenn für jede zusammenhängende Summe $M \cong M_1 \# M_2$ gilt $M_1 \cong S^3$ oder $M_2 \cong S^3$.

Die Zerlegung von 3-Mannigfaltigkeiten entlang von Sphären in Prim-Mannigfaltigkeiten geht auf Kneser zurück [Kn, S. 253]. Eine übersichtliche Darstellung findet sich bei Hempel [H, Kapitel 3]. Wir werden die Primzerlegung nur für kompakte, orientierbare Mannigfaltigkeiten benötigen, aber für die Eindeutigkeit der Zerlegung braucht die Orientierbarkeit nicht gefordert zu werden.

Satz 1.2 (Primzerlegungssatz). *Sei M eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit. Dann gibt es endlich viele Prim-Mannigfaltigkeiten M_1, \dots, M_n mit $M = M_1 \# \dots \# M_n$. Die M_i sind bis auf Homöomorphie und Reihenfolge der Summanden eindeutig.*

Für einen Beweis siehe beispielsweise [H, Theorem 3.15 und Theorem 3.21]. Mit folgendem Begriff können Prim-Mannigfaltigkeiten noch genauer klassifiziert werden.

Definition 1.3 (irreduzibel). Eine 3-Mannigfaltigkeit M heißt *irreduzibel*, wenn jede S^2 in M eine D^3 berandet, das heißt zu jeder Einbettung $f : S^2 \rightarrow M$ gibt es eine Einbettung $\bar{f} : D^3 \rightarrow M$ mit $\partial \bar{f}(D^3) = f(S^2)$.

Lemma 1.4. *Sei M prim. Dann ist M irreduzibel oder ein S^2 -Bündel über S^1 .*

Auch dazu findet sich ein Beweis bei Hempel [H, Lemma 3.13].

Für die Zerlegung entlang von Tori müssen wir etwas weiter ausholen und zunächst den Begriff der Seifert-Mannigfaltigkeit einführen. Er geht zurück auf eine Arbeit von Seifert [Sei]. Wir werden uns bei Einführung der Definition vor allem an das

Buch von Jaco [Ja] halten, das sich auf den für uns ausreichenden orientierbaren Fall beschränkt, und dabei die deutschen Bezeichnungen von Orlik, Vogt und Zieschang [OVZ] verwenden.

Sei die 2-Disk $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ durch Polarkoordinaten $\{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ gegeben und (μ, ν) ein Paar ganzer, teilerfremder Zahlen. Ein *gefaserter Volltorus vom Typ (μ, ν)* ist ein Vollzylinder $D^2 \times [0, 1]$, bei dem die Boden- und Deckelfläche um den Winkel μ/ν verdreht identifiziert sind, also

$$((r, \theta), 1) = ((r, \theta + \frac{2\pi\nu}{\mu}), 0)$$

gesetzt wird. Dabei setzen sich jeweils μ achsenparallele Strecken zu einfach-geschlossenen Kurven, den Fasern des Volltorus zusammen, die das Loch des Volltorus μ Mal umlaufen und sich dabei ν Mal um den Torus winden. Einzige Ausnahme ist die Achse des Vollzylinders, die Seele, die den gefaserten Volltorus nur einmal umläuft. Bis auf fasertreue Homöomorphismen kann $\mu > 0$ und $0 \leq \nu < \mu$ angenommen werden. Ist $\mu > 1$ heißt die Seele Ausnahmefaser, ist $\mu = 1$, so heißt der gefaserte Volltorus regulär gefasert und jede Faser ist eine reguläre Faser.

Definition 1.5. Eine zusammenhängende orientierbare kompakte 3-Mannigfaltigkeit M heißt *Seifert-Mannigfaltigkeit*, wenn es eine Zerlegung von M in disjunkte einfach-geschlossene Kurven, den sogenannten Fasern, gibt, so dass jede Faser eine geschlossene Umgebung von Fasern besitzt, die fasertreu homöomorph zu einem gefaserten Volltorus ist. Ränder einer Seifert-Mannigfaltigkeit sind immer gefaserte Tori.

Der Quotientenraum, den man aus einer Seifert-Mannigfaltigkeit M erhält, wenn man jede Faser mit einem Punkt identifiziert, heißt *Zerlegungsfläche* von M und ist eine zusammenhängende zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Auch wenn die Seifert-Mannigfaltigkeit orientierbar war, muss die Zerlegungsfläche nicht orientierbar sein.

Wir werden für die Fundamentalgruppen von Seifert-Mannigfaltigkeiten die Präsentationen aus dem folgenden Satz verwenden, der beispielsweise von Hempel [H, Satz 12.1] und ausführlicher von Seifert [Sei, §10] bewiesen wird.

Satz 1.6. *Sei M eine kompakte Seifert-Mannigfaltigkeit mit q Ausnahmefasern und B ihre Zerlegungsfläche vom Geschlecht g und mit p Randkomponenten. Ist B orientierbar, gilt*

$$\begin{aligned} \pi_1(M) = \langle & a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_q, d_1, \dots, d_p, t; \\ & a_i t a_i^{-1} = t^{\varepsilon_i}, b_i t b_i^{-1} = t^{\delta_i}, c_j t c_j^{-1} = t^{\eta_j}, d_k t d_k^{-1} = t^{\theta_k}, c_j^{\alpha_j} = t^{\beta_j}, \\ & c_q = [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] c_1 \dots c_{q-1} d_1 \dots d_p \rangle \end{aligned}$$

bzw. ist B nicht orientierbar, gilt

$$\begin{aligned} \pi_1(M) = \langle & a_1, \dots, a_g, c_1, \dots, c_q, d_1, \dots, d_p, t; \\ & a_i t a_i^{-1} = t^{\varepsilon_i}, c_j t c_j^{-1} = t^{\delta_j}, d_k t d_k^{-1} = t^{\eta_k}, c_j^{n_j} = t^{s_j}, \\ & c_q = a_1^2 \dots a_g^2 c_1 \dots c_{q-1} d_1 \dots d_p \rangle, \end{aligned}$$

wobei alle $\varepsilon_i, \delta_i, \eta_i, \theta_i \in \{-1, +1\}$ und für jede Ausnahmefaser j gilt $0 < n_j < s_j$.

Eine *Fläche* ist im Folgenden immer eine zusammenhängende, kompakte, orientierbare, zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Die Fundamentalgruppen von Flächen (vom Geschlecht $\geq x$) werden abkürzend auch als *Flächengruppen* (vom Geschlecht $\geq x$) bezeichnet.

Definition 1.7 (unkomprimierbar). Sei M eine 3-Mannigfaltigkeit. Eine in M eingebettete Fläche F mit $\partial M \cap F = \partial F$ oder $F \subset \partial M$ heißt *unkomprimierbar*, wenn M keine 2-Sphäre ist und die Einbettung $F \rightarrow M$ eine injektive Abbildung $\pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M)$ auf den Fundamentalgruppen induziert. Andernfalls heißt sie *komprimierbar*.

Definition 1.8 (zweiseitig). Sei $h : F \rightarrow M$ eine Einbettung einer Fläche F in eine 3-Mannigfaltigkeit M . F heißt *zweiseitig* in M eingebettet, wenn es eine Einbettung $\tilde{h} : F \times [0, 1] \rightarrow M$ gibt, so dass $\tilde{h}(x, \frac{1}{2}) = h(x)$ für alle $x \in F$, $\tilde{h}(\partial F \times [0, 1]) \subset \partial M$ und $\tilde{h}(F \times [0, 1])$ eine Umgebung von F in M ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn das Normalenbündel von F trivial ist.

Definition 1.9 (Haken-Mannigfaltigkeit). Eine irreduzible 3-Mannigfaltigkeit M heißt *Haken-Mannigfaltigkeit*¹, wenn sie eine unkomprimierbare, zweiseitige Fläche enthält.

Definition 1.10 (parallel). Seien F_0 und F_1 zwei in einer 3-Mannigfaltigkeit M zweiseitig eingebettete Flächen. F_0 und F_1 heißen *parallel*, wenn es eine Einbettung $h : F_0 \times [0, 1] \rightarrow M$ gibt, so dass $h(F_0 \times \{i\}) = F_i$ für $i = 0, 1$. Eine zweiseitig eingebettete Fläche $F \subset M$ heißt *randparallel*, wenn es eine Einbettung $h : F \times [0, 1] \rightarrow M$ gibt mit $h(F \times 0) = F$ und $\partial(h(F \times [0, 1])) = F$.

Definition 1.11 (atorisch). Eine 3-Mannigfaltigkeit M heißt *atorisch*, wenn jeder unkomprimierbar eingebetteter Torus bereits randparallel ist.

¹In der englischen Literatur wird häufig auch der Begriff *sufficiently large manifold* benutzt.

Sei M eine kompakte orientierbare Haken-Mannigfaltigkeit. Wir wollen M entlang von disjunkt eingebetteten, unkomprimierbaren Tori auftrennen. Diese Zerlegung ist im Allgemeinen erst einmal nicht eindeutig. Johannson [Jo] und Jaco-Shalen [JS] haben aber gezeigt, dass lediglich Seifert-Mannigfaltigkeiten für die Nichteindeutigkeit verantwortlich sind. Man kann deshalb M eindeutig bis auf Isotopie in eine minimale Menge von Seifert- und atorischen Mannigfaltigkeiten zerlegen. Diese Zerlegung wollen wir *Toruszerlegung* nennen. Da es unter den $|SL_2(\mathbb{Z})|$ -vielen Möglichkeiten, einen Volltorus einzukleben, keine kanonische Wahl gibt, behalten die Teilstücke von der Toruszerlegung unkomprimierbare Torusränder zurück. Wir werden diese Teilstücke im Folgenden als *Seifert- und atorische Komponenten* (der Toruszerlegung von M) bezeichnen. Es gibt ein paar Mannigfaltigkeiten, die beides sind, die wir aber den Seifertkomponenten zuordnen wollen. Wenn wir also im weiteren Verlauf der Arbeit von einer atorischen Komponente sprechen, soll der Fall einer atorischen Seifert-Mannigfaltigkeit immer ausgeschlossen sein. Alle Seifert-Komponenten zusammen heißen *charakteristische Untermannigfaltigkeit* von M . Eine Mannigfaltigkeit, deren Toruszerlegung nur aus Seifert-Komponenten besteht, heißt *Graph-Mannigfaltigkeit* und wir nennen sie *nicht-triviale Graph-Mannigfaltigkeit*, wenn die Toruszerlegung nicht trivial ist, also aus mindestens zwei Seifert-Komponente besteht. Besitzt M einen nicht-leeren Rand, kann man zusätzlich noch entlang unkomprimierbarer Annuli zerlegen. Wir werden aber hauptsächlich nur die Zerlegung entlang von Tori verwenden und fassen das abschließend in einem Satz zusammen. Neumann und Swarup haben in [NeS] dafür einen neuen übersichtlicheren Beweis geführt.

Satz 1.12 (Toruszerlegung). *Sei M eine kompakte orientierbare Haken-Mannigfaltigkeit. Dann gibt es in M eine Menge T von unkomprimierbaren, disjunkten Tori, so dass jede Komponente von $M \setminus T$ entweder atorisch oder seifertsch ist. So eine minimale Menge T ist eindeutig bis auf Isotopie.*

1.2 Kranzprodukt

Wir werden viel mit Kranzprodukten und auch semidirekten Produkten zu tun haben und neben allgemein bekannten auch ein paar spezielle Eigenschaften benötigen, die wir zusammen mit der Definition im Folgenden einführen.

Für eine Gruppe G und eine Menge M bezeichnet G^M die Gruppe der Abbildungen von M nach G . Die Verknüpfung ist durch punktweise Verknüpfung in G gegeben:

$$(fg)(m) = f(m)g(m) \quad \text{für } f, g \in G^M \text{ und } m \in M.$$

Operiert G auf M schreiben wir für die Operation eines Elements $g \in G$ auf $m \in M$ kurz ${}^g m$.

Definition 1.13 (Semidirektes Produkt). Seien A und Q beliebige Gruppen und

$$\phi : Q \rightarrow \text{Aut}(A)$$

ein Gruppenhomomorphismus. Q operiert also auf A und mit Hilfe dieser Operation konstruieren wir eine Erweiterung E von A durch Q . Die Menge

$$E = A \times Q = \{(a, q) \mid a \in A, q \in Q\}$$

wird mit der Verknüpfung

$$(a, q)(a', q') = (a {}^q a', qq') = (a\phi(q)(a'), qq')$$

zu einer Gruppe. Mit

$$\alpha : A \rightarrow E, \quad a \mapsto (a, 1) \quad \text{und} \quad \beta : E \rightarrow Q, \quad (a, q) \mapsto q$$

sieht man, dass E eine Erweiterung von A durch Q ist. E heißt *semidirektes Produkt* von A und Q und wir schreiben dafür

$$E = A \rtimes_{\phi} Q$$

bzw., wenn die verwendete Gruppenoperation klar oder irrelevant ist,

$$E = A \rtimes Q.$$

Lemma 1.14. *Sei*

$$1 \rightarrow K \rightarrow G \xrightarrow{p} H \rightarrow 1$$

eine exakte Sequenz von Gruppen, die spaltet. Das heißt es gibt einen Gruppenhomomorphismus $s : H \rightarrow G$ mit $p \circ s = \text{id}_H$. Dann ist

$$G \cong K \rtimes_{\phi} H,$$

wobei

$$\begin{aligned} \phi : H &\rightarrow \text{Aut}(K) \\ h &\mapsto (k \mapsto s(h)ks(h)^{-1}). \end{aligned}$$

Beweis. Wir fassen K als Untergruppe von G auf und definieren

$$\Phi : K \rtimes_{\phi} H \rightarrow G, \quad (k, h) \mapsto ks(h).$$

Wie man leicht nachrechnet, ist Φ ein Isomorphismus: Φ ist surjektiv, denn für $g \in G$ ist $gs(p(g)^{-1}) \in \ker(p) \cong K$ und es gilt $\Phi(gs(p(g)^{-1}), p(g)) = g$. Φ ist injektiv, denn

$$\begin{aligned} 1 = \Phi(k, h) = ks(h) &\Rightarrow s(h) = k^{-1} \Rightarrow s(h) \in \ker(p) \\ &\Rightarrow 1 = p(s(h)) = h \Rightarrow k = 1. \end{aligned}$$

Φ ist ein Homomorphismus, denn

$$\begin{aligned} \Phi(k, h)\Phi(k', h') &= ks(h)k's(h') = ks(h)k's(h)^{-1}s(h)s(h') \\ &= k\phi(h)(k')s(h)s(h') = \Phi(k {}^h k', hh'). \end{aligned}$$

□

Definition 1.15 (Kranzprodukt). Seien G und H Gruppen und H operiere auf einer Menge M . Die Operation von H auf M induziert eine Operation von H auf G^M durch

$${}^h f(m) := f({}^{h^{-1}}m) \quad \text{für } f \in G^M, h \in H, m \in M.$$

Das *Kranzprodukt* $G \wr_M H$ ist als das semidirekte Produkt von G^M und H bezüglich dieser induzierten Gruppenoperation definiert. Also

$$G \wr_M H := G^M \rtimes H,$$

wobei $G \wr_M H$ als Menge durch $G^M \times H$ gegeben ist und mit der Verknüpfung

$$(f, h)(f', h') = (f {}^h f', hh')$$

zu einer Gruppe wird:

Ein neutrales Element ist durch $(c_1, 1) \in G \wr_M H$ mit $c_1(m) = 1$ für alle $m \in M$ gegeben und zu jedem $(f, h) \in G \wr H$ findet man in $({}^{h^{-1}}f^{-1}, h^{-1})$ ein Inverses, wobei ${}^{h^{-1}}f^{-1}(x) := (f({}^{h^{-1}}x))^{-1}$ für $x \in M$. Die Assoziativität rechnet man wie folgt nach:

$$\begin{aligned} (f_1, h_1)((f_2, h_2)(f_3, h_3)) &= (f_1, h_1)(f_2 ({}^{h_2}f_3), h_2 h_3) \\ &= (f_1 {}^{h_1}f_2 {}^{h_1 h_2}f_3, h_1 h_2 h_3) \\ &= (f_1 {}^{h_1}f_2, h_1 h_2)(f_3, h_3) \\ &= (((f_1, h_1)(f_2, h_2))(f_3, h_3)). \end{aligned}$$

Wir werden bei Kranzprodukten immer die Operation von H auf sich selbst durch Linksmultiplikation verwenden und schreiben für $G \wr_H H$ kurz $G \wr H$.

Bemerkung 1.16. Mit dieser Definition ist $G^H \times \{1\}$ offensichtlich ein Normalteiler von $G \wr H$, der endlichen Index hat, wenn H endlich ist.

Wir werden später viel mit endlichen Erweiterungen zu tun haben. Dabei leistet das Kranzprodukt hilfreiche Dienste, da man für Erweiterungen

$$1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow 1$$

G als Untergruppe in $N \wr K$ wiederfindet:

Satz 1.17. *Sei G eine beliebige Gruppe mit einer normalen Untergruppe N und sei $K := G/N$. Dann ist G eine Untergruppe von $N \wr K$.*

Beweis. Sei $p : G \rightarrow K$ ein surjektiver Homomorphismus mit Kern N . Für jedes $u \in K$ wähle aus $p^{-1}(u)$ einen Repräsentanten $t_u \in G$. Dann liegt für jedes $x \in G$ $t_u x t_{up(x)}^{-1}$ im Kern von p und wir können Abbildungen $f_x : K \rightarrow N$ definieren durch

$$f_x(u) := t_u x t_{up(x)}^{-1} \quad \text{für alle } u \in K$$

und erhalten mit

$$\begin{aligned} \Phi : G &\rightarrow N \wr K \\ x &\mapsto (f_x, p(x)) \end{aligned}$$

einen injektiven Gruppenhomomorphismus. Im Detail nachgerechnet wird das in [DM, 2.6A Universal embedding theorem]. \square

Wir werden noch einige weitere Eigenschaften des Kranzproduktes benötigen, die wir im Folgenden aufführen.

Lemma 1.18. *Sei G eine Gruppe, U eine Untergruppe von G und H eine beliebige endliche Gruppe. Dann ist $U \wr H$ eine Untergruppe von $G \wr H$.*

Beweis. Sei $f : U \rightarrow G$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus. Dann ist auch

$$\begin{aligned} \tilde{f} : U \wr H &\rightarrow G \wr H \\ (u, h) &\mapsto (f \circ u, h) \end{aligned}$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus, wie man leicht nachrechnet. \square

Lemma 1.19. *Seien G_1, G_2 und H Gruppen. Dann ist $(G_1 \times G_2) \wr H$ eine Untergruppe von $(G_1 \wr H) \times (G_2 \wr H)$.*

Beweis. Sei $(\phi, h) \in (G_1 \times G_2) \wr H$, also $\phi : H \rightarrow G_1 \times G_2$ eine Abbildung von Mengen und $h \in H$. p_i bezeichne die Projektion auf die i -te Komponente. Wie man leicht nachrechnet, ist durch

$$\begin{aligned} \Phi : (G_1 \times G_2) \wr H &\rightarrow (G_1 \wr H) \times (G_2 \wr H) \\ (\phi, h) &\mapsto ((p_1 \circ \phi, h), (p_2 \circ \phi, h)) \end{aligned}$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus gegeben. \square

Lemma 1.20. Sei $\{G_i\}_{i \in I}$ ein gerichtetes System von Gruppen, dass durch Gruppenhomomorphismen $j_i : G_i \rightarrow G_{i+1}$ gerichtet ist. Sei H eine endliche Gruppe der Ordnung n . Für das gerichtete System von Gruppen $\{G_i \wr H\}_{i \in I}$, gerichtet durch die Gruppenhomomorphismen

$$J_i : G_i \wr H \rightarrow G_{i+1} \wr H, \quad (g, h) \mapsto (j_i \circ g, h),$$

gilt dann

$$\operatorname{colim}_{i \in I} (G_i \wr H) = (\operatorname{colim}_{i \in I} G_i) \wr H.$$

Beweis. Wir fassen im folgenden Beweis G^H immer als G^n auf. Mit den Homomorphismen $\psi_i : G_i \rightarrow \operatorname{colim}_{i \in I} G_i$ erhalten wir auch Homomorphismen

$$\begin{aligned} \Psi_i : G_i \wr H &\rightarrow (\operatorname{colim}_{i \in I} G_i) \wr H \\ (g_1, \dots, g_n, h) &\mapsto (\psi_i(g_1), \dots, \psi_i(g_n), h). \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass $(\operatorname{colim}_{i \in I} G_i) \wr H$ zusammen mit den Ψ_i die universelle Eigenschaft von $\operatorname{colim}_{i \in I} (G_i \wr H)$ erfüllt.

Sei L eine Gruppe und $\phi_i : G_i \wr H \rightarrow L$ Homomorphismen, so dass $\phi_i = \phi_{i+1} \circ J_i$ für alle $i \in I$. Zu zeigen ist, dass es genau einen Homomorphismus

$$\Phi : (\operatorname{colim}_{i \in I} G_i) \wr H \rightarrow L$$

gibt, so dass $\Phi \circ \Psi_i = \phi_i$ für alle $i \in I$ gilt, also das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & (\operatorname{colim}_{i \in I} G_i) \wr H & & \\ & & & \nearrow \Psi_i & \uparrow \Psi_{i+1} & \searrow \Phi & \\ \dots & \xrightarrow{J_{i-1}} & (G_i \wr H) & \xrightarrow{J_i} & (G_{i+1} \wr H) & \xrightarrow{\dots} & \\ & & \searrow \phi_i & & \searrow \phi_{i+1} & & \\ & & & & & & L \end{array}$$

Sei $(g_1, \dots, g_n, h) \in (\operatorname{colim}_{i \in I} G_i) \wr H$. Für jedes g_s finden wir ein $g_s^{i_s} \in G_{i_s}$, $i_s \in I$ mit $\psi_{i_s}(g_s^{i_s}) = g_s$. Sei $N := \max\{i_s \mid 1 \leq s \leq n\}$ und $\tilde{g}_s := j_{N-1} \circ \dots \circ j_{i_s}(g_s^{i_s}) \in G_N$. Dann gilt $\Psi_N(\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n, h) = (g_1, \dots, g_n, h)$ und es bleibt keine andere Wahl als

$$\Phi((g_1, \dots, g_n, h)) := \phi_N((\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n, h))$$

zu setzen.

Da die ϕ_i Gruppenhomomorphismen sind, ist auch Φ Gruppenhomomorphismus, denn auch für zwei Tupel $(a_1, \dots, a_n, h_1), (b_1, \dots, b_n, h_2) \in (\operatorname{colim}_{i \in I} G_i) \wr H$ finden wir ein $N \in I$ und $(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n, h_1), (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n, h_2) \in G_N \wr H$, so dass gilt

$$\Phi((a_1, \dots, a_n, h_1)(b_1, \dots, b_n, h_2)) = \phi_N((\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n, h_1)(\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n, h_2)).$$

□

Das folgende Lemma wird sich im weiteren Verlauf der Arbeit noch als sehr nützlich erweisen. So ersetzt es zum Beispiel [R1, Lemma 5.4] im Beweis von Satz 3.23 und es ermöglicht außerdem einen unkomplizierten Beweis von Satz 3.8, der uns mit Korollar 3.10 im Beweis des Hauptsatzes 4.20 etwas Arbeit erspart.

Lemma 1.21. *Seien G, H und K Gruppen. $(G \wr H) \wr K$ ist eine Untergruppe von $G \wr (H \wr K)$.*

Beweis. Seien $(\phi, x), (\psi, y) \in (G \wr H) \wr K$, d.h. $x, y \in K$ und

$$\begin{aligned} \phi, \psi : K &\rightarrow (G \wr H) \\ k &\mapsto (f_k : H \rightarrow G, h_k). \end{aligned}$$

Mit $[\cdot]_i$, $i = 1, 2$ wird im Folgenden die Projektion auf die i -te Komponente bezeichnet bzw. mit ϕ_i, ψ_i , $i = 1, 2$ die Verknüpfung von ϕ und ψ mit der Projektion auf die i -te Komponente. $\phi_1, \psi_1 : K \rightarrow (H \rightarrow G)$ und $\phi_2, \psi_2 : K \rightarrow H$ sind Abbildung von Mengen. Wir definieren

$$\begin{aligned} \Phi : (G \wr H) \wr K &\rightarrow G \wr (H \wr K) \\ (\phi, x) &\mapsto (\alpha_\phi, (\phi_2, x)) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_\phi : H \wr K &\rightarrow G \\ (\tilde{h} : K \rightarrow H, k) &\mapsto [\phi(k)]_1(\tilde{h}(k)) \end{aligned}$$

Zunächst zeigen wir, dass Φ ein Gruppenhomomorphismus ist.

$$\begin{aligned}
\Phi((\phi, x)(\psi, y)) &= \Phi(\phi^x \psi, xy) \\
&= (\alpha_{\phi^x \psi}, ([\phi^x \psi]_2, xy)) \\
&= (\alpha_{\phi^x \psi}, (\phi_2^x \psi_2, xy)) \\
\Phi(\phi, x) \Phi(\psi, y) &= (\alpha_{\phi}, (\phi_2, x)) (\alpha_{\psi}, (\psi_2, y)) \\
&= \left(\alpha_{\phi}^{(\phi_2, x)} \alpha_{\psi}, (\phi_2, x)(\psi_2, y) \right) \\
&= \left(\alpha_{\phi}^{(\phi_2, x)} \alpha_{\psi}, (\phi_2^x \psi_2, xy) \right)
\end{aligned}$$

In der zweiten Komponente sieht man bereits, dass die beiden Ausdrücke übereinstimmen. Für die erste Komponente müssen wir noch etwas genauer hinsehen:

Sei $(\tilde{h} : K \rightarrow H, k) \in H \wr K$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\alpha_{\phi^x \psi}(\tilde{h}, k) &= \underbrace{[\phi(k)]_1}_{\in G \wr H} \underbrace{\psi(x^{-1}k)}_{\in G \wr H} \left(\tilde{h}(k) \right) \\
&= \left([\phi(k)]_1 [\phi_2^{(k)} \psi(x^{-1}k)]_1 \right) \left(\tilde{h}(k) \right) \\
&= \left(\phi_1(k) \left(\tilde{h}(k) \right) \right) \left(\psi_1(x^{-1}k) \left(\phi_2^{-1}(k) \tilde{h}(k) \right) \right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(\alpha_{\phi}^{(\phi_2, x)} \alpha_{\psi})(\tilde{h}, k) &= \alpha_{\phi}(\tilde{h}, k)^{(\phi_2, x)} \alpha_{\psi}(\tilde{h}, k) \\
&= \alpha_{\phi}(\tilde{h}, k) \alpha_{\psi}((\phi_2, x)^{-1}(\tilde{h}, k)) \\
&= \alpha_{\phi}(\tilde{h}, k) \alpha_{\psi}((x^{-1} \phi_2^{-1}, x^{-1})(\tilde{h}, k)) \\
&= \alpha_{\phi}(\tilde{h}, k) \alpha_{\psi}((x^{-1} \phi_2^{-1} x^{-1} \tilde{h}, x^{-1}k)) \\
&= \left(\phi_1(k) \left(\tilde{h}(k) \right) \right) \left(\psi_1(x^{-1}k) ((x^{-1} \phi_2^{-1} \tilde{h})(x^{-1}k)) \right) \\
&= \left(\phi_1(k) \left(\tilde{h}(k) \right) \right) \left(\psi_1(x^{-1}k) (\phi_2^{-1}(k) \tilde{h}(k)) \right).
\end{aligned}$$

Die Injektivität ist relativ offensichtlich, man muss sich nur einmal durch die Definition kämpfen:

Sei $(\phi, x) \in \ker(\Phi)$. ϕ_2 und x tauchen in $\Phi((\phi, x)) = (\alpha_{\phi_1}, (\phi_2, x))$ in der zweiten Komponente unverändert auf, müssen also trivial sein. Angenommen ϕ_1 ist nicht trivial. Dann gibt es ein $k \in K$ und ein $h \in H$ mit $\phi_1(k)(h) \neq 1$. Sei $\tilde{h} : K \rightarrow H$ eine Mengenabbildung mit $\tilde{h}(k) = h$. Dann gilt $\alpha_{\phi_1}(\tilde{h}, k) = \phi_1(k)(\tilde{h}(k)) = \phi_1(k)(h) \neq 1$, was im Widerspruch zu $(\phi, x) \in \ker(\Phi)$ steht. \square

2 Isomorphismusvermutungen

Die ursprüngliche Formulierung der Farrel-Jones-Isomorphismusvermutung findet sich bei Farrel und Jones [FJ, 1.6]. Wir verwenden eine abgewandelte Definition mit Hilfe von äquivarianten Homologietheorien, die beispielsweise bei Lück-Reich [LR] ausführlich beschrieben ist. Wir beschränken uns dabei auf diskrete Gruppen. Ringe sind immer assoziativ mit Eins, aber nicht notwendigerweise kommutativ. Sei also im Folgenden G eine diskrete Gruppe und R ein assoziativer Ring mit Eins.

Wir benötigen zwei Konstruktionen:

1. Den klassifizierenden Raum $E_{\mathcal{F}}G$ zu einer Gruppe G und einer Familie \mathcal{F} von Untergruppen von G und
2. eine äquivariante Homologietheorie $\mathcal{H}_*^?$.

Für eine Gruppe G ist eine *Familie \mathcal{F} von Untergruppen* eine Menge von Untergruppen von G , die abgeschlossen ist unter Konjugation und Untergruppenbildung. Ist $\phi : K \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus und \mathcal{F} eine Familie von Untergruppen von G , dann definiere die Familie $\phi^*\mathcal{F}$ von Untergruppen von K durch

$$\phi^*\mathcal{F} := \{H \subseteq K \mid \phi(H) \in \mathcal{F}\}.$$

Definition 2.1. Sei G eine Gruppe und \mathcal{F} eine Familie von Untergruppen von G . Dann gibt es eindeutig bis auf G -Homotopieäquivalenz einen G -CW-Komplex $E_{\mathcal{F}}G$ mit der Eigenschaft, dass

1. für jedes $x \in E_{\mathcal{F}}G$ die Standgruppe von x in \mathcal{F} ist und
2. für jedes $H \in \mathcal{F}$ die Fixpunktmenge $(E_{\mathcal{F}}G)^H$ kontraktibel ist.

$E_{\mathcal{F}}G$ heißt *Modell für den klassifizierenden Raum der Familie \mathcal{F}* .

Alternativ kann $E_{\mathcal{F}}G$ auch mit Hilfe der universellen Eigenschaft charakterisiert werden, dass es für jeden G -CW-Komplex X , dessen Standgruppen alle zu \mathcal{F} gehören, bis auf G -Homotopie genau eine G -Abbildung von X nach $E_{\mathcal{F}}G$ existiert. Für ausführlichere Details zu klassifizierenden Räumen siehe [Lü].

Aufbauend auf der Definition einer G -Homologietheorie (siehe [LR, 2.1.4]) definieren wir eine äquivariante Homologietheorie.

Definition 2.2. Eine *äquivariante Homologietheorie* $\mathcal{H}_*^?$ mit Werten in R -Moduln ordnet jeder Gruppe G eine G -Homologietheorie \mathcal{H}_*^G mit Werten in R -Moduln zu mit folgender Induktionsstruktur: Zu jedem Gruppenhomomorphismus $\alpha : H \rightarrow G$ gibt es für $n \in \mathbb{Z}$ und alle H -CW-Paare (X, A) einen natürlichen Homomorphismus

$$\text{ind}_\alpha : \mathcal{H}_n^H(X, A) \rightarrow \mathcal{H}_n^G(\text{ind}_\alpha(X, A))$$

mit $\text{ind}_\alpha(X, A) := G \times_\alpha (X, A)$ und zwar derart, dass folgende Axiome erfüllt sind:

1. Verträglichkeit mit dem Randhomomorphismus

$$\partial_n^G \circ \text{ind}_\alpha = \text{ind}_\alpha \circ \partial_n^H$$

2. Funktorialität in α

Sei $\beta : G \rightarrow K$ ein Gruppenhomomorphismus, so dass $\ker(\beta \circ \alpha)$ frei auf X operiert und

$$f_1 : \text{ind}_\beta \text{ind}_\alpha X \rightarrow \text{ind}_{\alpha \circ \beta} X, \quad (k, g, x) \mapsto (k\beta(g), x)$$

der natürliche K -Homöomorphismus. Dann gilt

$$\text{ind}_{\beta \circ \alpha} = \mathcal{H}_n^K(f_1) \circ \text{ind}_\beta \circ \text{ind}_\alpha : \mathcal{H}_n^H(X, A) \rightarrow \mathcal{H}_n^K(\text{ind}_{\beta \circ \alpha}(X, A)).$$

3. Verträglichkeit mit Konjugation

Sei $c(g) : G \rightarrow G$ die Konjugation die g' auf $gg'g^{-1}$ schickt. Für $n \in \mathbb{Z}, g \in G$ und ein G -CW-Paar (X, A) stimmen die Homomorphismen

$$\text{ind}_{c(g)} : \mathcal{H}_n^G(X, A) \rightarrow \mathcal{H}_n^G(\text{ind}_{c(g)}(X, A))$$

und $\mathcal{H}_n^G(f_2)$ überein, wobei $f_2 : (X, A) \rightarrow \text{ind}_{c(g)}(X, A)$ der durch $x \mapsto (1, g^{-1}x)$ definierte G -Homöomorphismus ist.

4. Bijektivität

Falls $\ker \alpha$ frei auf X operiert, so ist

$$\text{ind}_\alpha : \mathcal{H}_n^H(X, A) \rightarrow \mathcal{H}_n^G(\text{ind}_\alpha(X, A))$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ bijektiv.

Definition 2.3 (Isomorphismusvermutung). Sei

1. G eine diskrete Gruppe,
2. \mathcal{F} eine Familie von Untergruppen von G und
3. $\mathcal{H}_*^?$ eine äquivariante Homologietheorie mit Werten in R -Moduln für einen assoziativen Ring R .

Das Tripel $(G, \mathcal{F}, \mathcal{H}_*^?)$ erfüllt die Isomorphismusvermutung (IC), wenn die Projektion $E_{\mathcal{F}}G \rightarrow \text{pt}$ einen Isomorphismus

$$\mathcal{H}_n^G(E_{\mathcal{F}}G) \rightarrow \mathcal{H}_n^G(\text{pt})$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ induziert.

Definition 2.4 (gefaserte Isomorphismusvermutung). $(G, \mathcal{F}, \mathcal{H}_*^?)$ erfüllt die gefaserte Isomorphismusvermutung (FIC), wenn für jeden Gruppenhomomorphismus $\phi : K \rightarrow G$ das Tripel $(K, \phi^*\mathcal{F}, \mathcal{H}_*^?)$ die Isomorphismusvermutung erfüllt.

Aus der gefaserten Isomorphismusvermutung folgt schon die Isomorphismusvermutung, indem man als Gruppenhomomorphismus die Identität wählt.

Im Folgenden sei \mathcal{F} nicht mehr eine Familie speziell für eine Gruppe gewählt, sondern eine Klasse von Gruppen, die abgeschlossen unter Isomorphismen und Untergruppen- und Quotientenbildung ist. Für eine Gruppe G bezeichnen wir dann mit \mathcal{F}_G die Familie, die alle Untergruppen von G enthält, die zu \mathcal{F} gehören. \mathcal{F}_G ist dann wieder wie im ursprünglichen Sinn eine Familie von Untergruppen von G .

Wir werden hauptsächlich mit einer noch stärkeren Variante der gefaserten Isomorphismusvermutung arbeiten:

Definition 2.5 (endlich erweiterbare, gefaserte Isomorphismusvermutung). Ein Tripel $(G, \mathcal{F}_G, \mathcal{H}_*^?)$ erfüllt $FICwF$, wenn FIC für jede endliche Gruppe H für das Tripel $(G \wr H, \mathcal{F}_{G \wr H}, \mathcal{H}_*^?)$ erfüllt ist.

Indem man H trivial wählt, sieht man sofort, dass aus $FICwF$ schon FIC folgt. $FICwF$ hat die nützliche Eigenschaft, dass sie sich, wie wir mit Satz 3.8 sehen werden, auf endliche Erweiterung vererbt.

Für beliebige Tripel sind diese Isomorphismusvermutungen falsch. Das Tripel muss also richtig gewählt werden. Ein besonderes Augenmerk werden wir auf die Farrell-Jones-Isomorphismusvermutung für L -Theorie und algebraische K -Theorie richten. Dafür fixieren wir für \mathcal{F} die Klasse aller virtuell zyklischen Gruppen \mathcal{VC} und als äquivariante Homologietheorien wählen wir $\mathcal{H}_n^?(-; \mathbf{K}_R)$ und $\mathcal{H}_n^?(-; \mathbf{L}^{(-\infty)}_R)$ wie beispielsweise von Lück und Reich in [LR, Proposition 6.7] definiert.

Definition 2.6 (*L-FIC* und *K-FIC*). Eine Gruppe G erfüllt die *Farrell-Jones-Isomorphismusvermutung* für *L-Theorie* bzw. *algebraische K-Theorie*, wenn die Isomorphismusvermutung von $(G, \mathcal{VC}_G, \mathcal{H}_*^?(-, \mathbf{L}^{\langle -\infty \rangle}_R))$ bzw. $(G, \mathcal{VC}_G, \mathcal{H}_*^?(-, \mathbf{K}_R))$ erfüllt wird, also die Projektion $E_{\mathcal{VC}_G} G \rightarrow \text{pt}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n^G(E_{\mathcal{VC}_G} G; \mathbf{K}_R) &\xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_n^G(\text{pt}; \mathbf{K}_R) \\ \mathcal{H}_n^G(E_{\mathcal{VC}_G} G; \mathbf{L}^{\langle -\infty \rangle}_R) &\xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_n^G(\text{pt}; \mathbf{L}^{\langle -\infty \rangle}_R) \end{aligned}$$

induziert.

G erfüllt die (endlich erweiterbare) gefaserte Farrell-Jones-Isomorphismusvermutung für *L-Theorie* bzw. *algebraische K-Theorie*, wenn $(G, \mathcal{VC}_G, \mathcal{H}_*^?(-, \mathbf{L}^{\langle -\infty \rangle}_R))$ bzw.

$(G, \mathcal{VC}_G, \mathcal{H}_*^?(-, \mathbf{K}_R))$ die (endlich erweiterbare) gefaserte Isomorphismusvermutung erfüllen. Wir schreiben dafür kurz G erfüllt *L-FIC*(wF) bzw. *K-FIC*(wF).

3 FIC-Werkzeugkasten

3.1 Schraubenzieher

Wir wenden uns zunächst nicht allzu tiefliegenden Resultaten zu, die uns aber nichtsdestotrotz im weiteren Verlauf dieser Arbeit noch wichtige Dienste leisten werden. Die meisten der folgenden Resultate finden sich übersichtlich zusammengefasst in [BLR, Abschnitt 1]. Wir erweitern einige lediglich von FIC auf $FICwF$.

Es sei bei den folgenden Aussagen immer eine äquivalente Homologietheorie fest gewählt und teilweise auch eine Klasse \mathcal{F} . Wir sagen ein Paar (G, \mathcal{F}_G) erfüllt FIC ($FICwF$), wenn (G, \mathcal{F}_G) bezüglich der gewählten Homologietheorie die (endlich erweiterbare) gefaserte Isomorphismusvermutung erfüllt bzw. wenn zusätzlich eine Klasse \mathcal{F} fest gewählt auch nur kurz „ G erfüllt $FIC(wF)$ “.

Schon in die Definition der gefaserten Isomorphismusvermutung eingebaut, ist

Lemma 3.1. *Sei $\phi : K \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus. Wenn FIC für (G, \mathcal{F}_G) erfüllt ist, dann ist FIC auch für $(K, \phi^* \mathcal{F}_G)$ erfüllt.*

Beweis. Sei L eine Gruppe und $\psi : L \rightarrow K$ ein Gruppenhomomorphismus und für (G, \mathcal{F}_G) gelte FIC . Nach Definition von FIC ist für $(K, (\phi \circ \psi)^* \mathcal{F}_G)$ die Isomorphismusvermutung erfüllt. Es gilt aber $(K, (\phi \circ \psi)^* \mathcal{F}_G) = (K, \psi^*(\phi^* \mathcal{F}_G))$, womit FIC für $(K, \phi^* \mathcal{F}_G)$ erfüllt ist. \square

Lemma 3.2. *Ist $FICwF$ für ein Paar (G, \mathcal{F}_G) erfüllt, dann wird $FICwF$ auch von (K, \mathcal{F}_K) erfüllt für jede Untergruppe K von G .*

Beweis. Für FIC erhalten wir die Aussage direkt aus Lemma 3.1, denn mit der Inklusion $i : K \rightarrow G$ gilt FIC für

$$(K, i^* \mathcal{F}_G) = (K, \mathcal{F}_K).$$

Sei nun G eine Gruppe, die $FICwF$ erfüllt, K eine Untergruppe von G und H eine beliebige endliche Gruppe. Aufgrund von Lemma 1.18 ist $K \wr H$ eine Untergruppe von $G \wr H$ und da FIC von $G \wr H$ erfüllt wird, ist FIC auch für $K \wr H$ wahr. Es gilt also $FICwF$ für K . \square

Betrachtet man $FICwF$ bezüglich Familien virtuell zyklischer Untergruppen oder anderer Familien, die endliche Gruppen einschließen, dann gilt $FICwF$ schon direkt für endliche Gruppen.

Lemma 3.3. *Sei G eine endliche Gruppe und \mathcal{F} eine Klasse von Gruppen, die alle endlichen Gruppen enthält. Dann wird $FICwF$ von (G, \mathcal{F}_G) erfüllt.*

Beweis. Sei $\phi : L \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus. Da G endlich ist, gilt $G \in \mathcal{F}_G$ und damit auch $L \in \phi^* \mathcal{F}_G$. Somit ist schon ein Punkt ein Modell für den klassifizierenden Raum von $E_{\phi^* \mathcal{F}_G} L$ und insbesondere

$$\mathcal{H}_n^G(E_{\phi^* \mathcal{F}_G} G) \rightarrow \mathcal{H}_n^G(pt)$$

ein Isomorphismus. Für eine beliebige endliche Gruppe H ist auch $G \wr H$ endlich und mit dem gleichen Argument gilt FIC für $G \wr H$, also $FICwF$ für G . \square

Wir brauchen die Verträglichkeit von $FICwF$ mit Kolimiten bezüglich gerichteter Systeme von Gruppen. Die erhalten wir, wenn wir eine bestimmte Voraussetzung an die äquivariante Homologietheorie stellen:

Definition 3.4 (streng stetige äquivariante Homologietheorie). Ein äquivariante Homologietheorie $\mathcal{H}_*^?$ heißt *streng stetig*, wenn für jede Gruppe G und ein gerichtetes System von Gruppen $\{G_i \mid i \in I\}$ mit $G = \text{colim}_{i \in I} G_i$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ die Abbildung

$$\text{colim}_{i \in I} j_i : \text{colim}_{i \in I} \mathcal{H}_n^{G_i}(pt) \rightarrow \mathcal{H}_n^G(pt)$$

ein Isomorphismus ist, wobei $j_i : \mathcal{H}_n^{G_i}(pt) \rightarrow \mathcal{H}_n^G(pt)$ die Komposition des Induktionshomomorphismus $\mathcal{H}_n^{G_i}(pt) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_n^G(G/G_i)$ mit der Abbildung ist, die von der Projektion $G/G_i \rightarrow pt$ induziert wird.

Satz 3.5. *Sei $\mathcal{H}_*^?$ eine streng stetige äquivariante Homologietheorie. Sei $\{G_i \mid i \in I\}$ ein gerichtetes System von Gruppen, das durch Homomorphismen $j_i : G_i \rightarrow G_{i+1}$ gerichtet ist. Falls $FICwF$ für $(G_i, \mathcal{F}_{G_i}, \mathcal{H}_*^?)$ für alle $i \in I$ erfüllt ist, dann ist $FICwF$ auch erfüllt für $(\text{colim}_{i \in I} G_i, \mathcal{F}_{\text{colim}_{i \in I} G_i}, \mathcal{H}_*^?)$.*

Beweis. Sei H eine beliebige endliche Gruppe. Nach der Definition von $FICwF$ ist FIC wahr für $(G_i \wr H, \mathcal{F}_{G_i \wr H}, \mathcal{H}_*^?)$ für alle $i \in I$. Mit den Homomorphismen

$$J_i : G_i \wr H \rightarrow G_{i+1} \wr H, \quad (f, h) \mapsto (j_i \circ f, h)$$

bilden die $\{G_i \wr H \mid i \in I\}$ ein gerichtetes System von Gruppen.

Sei $G := \operatorname{colim}_{i \in I} (G_i \wr H)$. Da wir $\mathcal{H}_*^?$ als streng stetig vorausgesetzt haben, gilt *FIC* für $(G, \mathcal{F}_G, \mathcal{H}_*^?)$. Ein Beweis dazu findet sich bei Bartels, Echterhoff und Lück [BEL, Proposition 4.6]. Es gilt mit Lemma 1.20

$$G = \operatorname{colim}_{i \in I} (G_i \wr H) \cong (\operatorname{colim}_{i \in I} G_i) \wr H.$$

Also ist *FIC* wahr für $(\operatorname{colim}_{i \in I} G_i) \wr H$ und damit *FICwF* für $\operatorname{colim}_{i \in I} G_i$. \square

Für das folgende Lemma nutzen wir das Transitivitätsprinzip, das beispielsweise in [BL, Theorem 1.5] bewiesen wird.

Satz 3.6 (Transitivitätsprinzip). *Seien $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ zwei Familien von Untergruppen von G und für jede Gruppe $H \in \mathcal{G}$ sei *FIC* erfüllt für $(H, \mathcal{F} \cap H)$. Dann ist *FIC* für (G, \mathcal{G}) genau dann wahr, wenn *FIC* für (G, \mathcal{F}) wahr ist.*

Lemma 3.7. *Sei $p : K \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus. *FIC* sei erfüllt für (G, \mathcal{F}_G) und für $(p^{-1}(C), \mathcal{F}_{p^{-1}(C)})$ für alle $C \in \mathcal{F}_G$. Dann wird *FIC* auch von (K, \mathcal{F}_K) erfüllt.*

Beweis. Sei $q : L \rightarrow K$ ein Gruppenhomomorphismus. Wir haben zu zeigen, dass *IC* von $(L, q^* \mathcal{F}_K)$ erfüllt wird. Es gilt $\mathcal{F}_K \subseteq p^* \mathcal{F}_G$, denn da \mathcal{F} abgeschlossen unter Quotientenbildung ist, gilt $p(A) \cong A / \ker(p|_A) \in \mathcal{F}$ für $A \in \mathcal{F}_K$ ist, also $p(A) \in \mathcal{F}_G$. Damit ist auch $q^* \mathcal{F}_K \subseteq q^* p^* \mathcal{F}_G$.

Wir wollen nun für die Familien $q^* \mathcal{F}_K$ und $q^* p^* \mathcal{F}_G$ das Transitivitätsprinzip anwenden. Sei $H \in q^* p^* \mathcal{F}_G$. Dann gibt es ein $V \in \mathcal{F}_G$ mit $q(H) \subseteq p^{-1}(V)$. Für das Transitivitätsprinzip brauchen wir *FIC* für $(H, q^* \mathcal{F}_K \cap H)$. Es gilt aber

$$q^* \mathcal{F}_K \cap H = (q|_H)^* \mathcal{F}_K = (q|_H)^* \mathcal{F}_{p^{-1}(V)}.$$

Für $(p^{-1}(V), \mathcal{F}_{p^{-1}(V)})$ ist *FIC* nach Voraussetzung erfüllt. Wir wenden Lemma 3.1 auf $q|_H$ an und erhalten *FIC* für $(H, (q|_H)^* \mathcal{F}_{p^{-1}(V)})$. \square

Wir werden später mit Lemma 3.16 noch zeigen, dass sich auch dieses Resultat auf *FICwF* erweitern lässt, wenn wir einige zusätzliche Voraussetzungen annehmen.

Der nächste Satz rechtfertigt schließlich, warum wir uns überhaupt mit Kranzprodukten und *FICwF* statt *FIC* beschäftigen.

Satz 3.8. *Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler von G mit endlichem Index. Ist *FICwF* für N erfüllt, dann ist *FICwF* auch schon für G wahr.*

Beweis. Wir haben folgende exakte Sequenz von Gruppen

$$1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow G/N \rightarrow 1.$$

Nach Satz 1.17 ist G Untergruppe von $N \wr (G/N)$. Für eine beliebige endliche Gruppe H gilt also mit Lemma 1.18 und Lemma 1.21

$$G \wr H \subset (N \wr (G/N)) \wr H \subset N \wr ((G/N) \wr H)$$

$(G/N) \wr H$ ist eine endliche Gruppe, da sowohl G/N als auch H endlich sind. Nach Definition von $FICwF$ ist FIC für $N \wr ((G/N) \wr H)$ wahr, was sich mit Lemma 3.2 auf die Untergruppe $G \wr H$ überträgt. Damit wird $FICwF$ von G erfüllt. \square

Die Voraussetzung, dass die Untergruppe normal sein muss, kann fallengelassen werden, wenn wir uns auf endlich erzeugte Gruppen einschränken, wie wir im Folgenden sehen.

Korollar 3.9. *Sei G eine endlich erzeugte Gruppe. Erfüllt G virtuell $FICwF$, d.h. es gibt eine Untergruppe mit endlichem Index in G , die $FICwF$ erfüllt, dann gilt $FICwF$ auch für G .*

Beweis. Sei H eine Untergruppe von G mit endlichem Index n , die $FICwF$ erfüllt. Definiere $N := \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$. N ist Normalteiler von G und eine Untergruppe von H . Da G endlich erzeugt ist, gibt es zu einem festen endlichen Index n nur endliche viele Untergruppen (siehe [Ba], Kapitel III, Theorem 3), das heißt wir finden eine endliche Teilmenge $M \subset G$ mit $N \cong \bigcap_{g \in M} gHg^{-1}$. Als endlicher Schnitt von Gruppen mit endlichem Index hat N auch endlichen Index in G .

N erfüllt als Untergruppe von H mit Lemma 3.2 auch $FICwF$ und mit Satz 3.8 gilt $FICwF$ dann auch für G . \square

Zum Abschluss dieses Abschnittes liefert uns ein zweites Korollar eine erste Aussage über Fundamentalgruppen von Mannigfaltigkeiten, die wir später verwenden werden.

Korollar 3.10. *Sei M eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit mit endlicher Überlagerung N , deren Fundamentalgruppe $FICwF$ erfüllt. Dann gilt $FICwF$ auch schon für die Fundamentalgruppe von M .*

Beweis. Als endliche Überlagerung einer kompakten Mannigfaltigkeit ist N auch wieder kompakt. Damit ist $\pi_1(N)$ endlich erzeugt. Die lange exakte Homotopiesequenz liefert uns $\pi_1(N)$ als Untergruppe von $\pi_1(M)$ mit endlichem Index. Mit dem vorherigen Korollar wird damit $FICwF$ von $\pi_1(M)$ erfüllt. \square

3.2 Bohrmaschinen

Wir kommen nun von den leichten Schraubenziehern zu schwererem Gerät. Als Ziel hatten wir uns aufgestellt:

Zielsatz. *Eine endlich erweiterbare, gefaserte Isomorphismusvermutung, die die Anforderungen W1 bis W5 erfüllt, gilt für Fundamentalgruppen von dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten.*

Wir werden nun erläutern, was es mit den Werkzeugen W1 bis W5, die wir für unseren Beweis des Zielsatzes benötigen, auf sich hat, und im Anschluss mit deren Hilfe noch einige weitere wichtige Werkzeuge beweisen.

W1: $FICwF$ gilt für alle Gruppen der Gestalt $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}$.

W2: $FICwF$ gilt für Fundamentalgruppen von nicht-positiv gekrümmten, geschlossenen Mannigfaltigkeiten.

W3: FIC gilt für virtuell abelsche Gruppen.

W4: Sei $\{G_i \mid i \in I\}$ ein gerichtetes System von Gruppen und für jedes G_i gelte FIC . Dann gilt FIC auch für $\text{colim}_{i \in I} G_i$.

W5: Sei $p : L \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus und FIC gelte für G . Ist FIC wahr für $p^{-1}(V)$ für jede virtuell zyklische Untergruppe V von G , dann gilt FIC auch für L .

Für eine beliebige Isomorphismusvermutung wissen wir nicht, ob tatsächlich all diese Anforderungen erfüllt werden. Aber wenn wir uns bei der Wahl der Isomorphismusvermutung etwas einschränken, bekommen wir einige dieser Werkzeuge zur Verfügung gestellt, was wir im Folgenden genauer ausführen werden.

W5 ist in den zentralen Sätzen 4.5 und 4.20 ein entscheidendes Beweismittel. Betrachten wir Isomorphismusvermutungen bezüglich Familien virtuell zyklischer Untergruppen, ist W5 nichts anderes als die Aussage von Lemma 3.7. Für jede Unterfamilie, wie beispielsweise die Familie endlicher Untergruppen oder die Familie der trivialen Untergruppe, gilt ebenfalls W5.

Spezialisieren wir uns noch weiter auf die Farrell-Jones-Isomorphismusvermutung für L -Theorie oder algebraische K -Theorie, bekommen wir mit Satz 3.5 auch noch W4, da in beiden Fällen die äquivarianten Homologietheorien streng stetig sind. Ein Beweis dafür findet sich von Bartels, Lück und Echterhoff in [BEL, Lemma

5.2], die dort auch noch einige andere streng stetige äquivariante Homologietheorien auflisten.

W2 erhalten wir, wenn wir wissen, dass *FIC* für Gruppen gilt, die proper, kompakt und isometrisch auf einem $\text{CAT}(0)$ -Raum operieren. Wir werden das in Satz 3.11 beweisen. Bei Bartels und Lück schlummert ein unveröffentlichter Beweis¹, dass *L-FIC* für $\text{CAT}(0)$ -Gruppen gilt und *K-FIC* immerhin für $n < 1$ für $\text{CAT}(0)$ -Gruppen wahr ist.

W3 hat Quinn in [Q, Theorem 1.2.2] schon für *K-FIC* gezeigt. Für die Farrell-Jones-Isomorphismusvermutung in algebraischer *K*-Theorie müssen wir also lediglich folgende zwei Werkzeuge als Voraussetzung fordern:

K-W1: Alle Gruppen der Gestalt $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}$ erfüllen *K-FIC_{wF}*.

K-W2: Für $n \geq 1$ gilt *K-FIC* für Gruppen, die proper, kompakt und isometrisch auf einem endlich dimensional CAT(0)-Raum operieren.

Für *L-FIC* fehlt uns leider ein ähnliches Resultate zu W3, aber dafür können wir davon ausgehen, dass *L-FIC* für $\text{CAT}(0)$ -Gruppen gilt. Es bleiben deshalb für den *L*-Theorie-Fall folgende zwei Voraussetzungen übrig:

L-W1: Alle Gruppen der Gestalt $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}$ erfüllen *L-FIC_{wF}*.

L-W2: *L-FIC* gilt für virtuell abelsche Gruppen.

Gruppen der Gestalt $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}$ sind ein Spezialfall von virtuellen poly- \mathbb{Z} -Gruppen, das heißt Gruppen, die mit endlichem Index eine Untergruppe enthalten, die eine Normalreihe besitzt mit Faktoren isomorph zu \mathbb{Z} . Zur Farrell-Jones-Isomorphismusvermutung und virtuell poly- \mathbb{Z} -Gruppen gibt es zwar von Farrell und Jones mit [FJ, Proposition 2.2] eine Aussage, auf die auch Roushon in seiner Arbeit über 3-Mannigfaltigkeiten verweist ([R1, Proposition 2.1]), allerdings ist das im Beweis von Farrell und Jones verwendete Theorem 4.8 ([FJ, S. 283]) nachwievor unbewiesen, so dass wir nicht darum herum kommen K-W1 und L-W1 als Voraussetzung zu fordern.

Für die (teilweise) Elimination von W2 als Voraussetzung für *L-FIC* und *K-FIC* müssen wir noch folgenden Satz nachreichen:

Satz 3.11. *FIC gelte für Gruppen die proper, kompakt und isometrisch auf einem $\text{CAT}(0)$ -Raum operieren. Dann gilt *FIC_{wF}* für Fundamentalgruppen von geschlossenen, nicht-positiv gekrümmten Mannigfaltigkeiten.*

¹inzwischen zu finden in: A. Bartels, W. Lück, The Borel Conjecture for hyperbolic and $\text{CAT}(0)$ -groups, arXiv:math.GT/0901.0442, 2009.

Beweis. Sei M eine geschlossene nicht-positiv gekrümmte Mannigfaltigkeit, \widetilde{M} ihre, ebenfalls nicht-positiv gekrümmte, universelle Überlagerung, die insbesondere ein CAT(0)-Raum ist. Sei $G := \pi_1(M)$ und H eine endliche Gruppe. Wir müssen FIC für $G \wr H$ zeigen und definieren dafür eine propere, kokompakte und isometrische Gruppenoperation von $G \wr H$ auf \widetilde{M}^H . G operiert auf \widetilde{M} bereits proper, kokompakt und isometrisch und zudem frei und eigentlich diskontinuierlich und ebenso G^H auf \widetilde{M}^H . Wir müssen uns also nur noch näher anschauen, was das H aus $G \wr H$ bewirkt. Wir definieren die Operation von $G \wr H$ auf \widetilde{M}^H durch

$$\begin{aligned} (f,0)(m_h)_{h \in H} &= \left(f^{(h)} m_h \right)_{h \in H} \\ (0,a)(m_h)_{h \in H} &= (m_{a^{-1}h})_{h \in H} \end{aligned}$$

für $(f,0), (0,a) \in G \wr H$ und $(m_h)_{h \in H} \in \widetilde{M}^H$. Es lässt sich leicht nachrechnen, dass dies tatsächlich eine Gruppenoperation definiert.

$(0,a)$ permutiert lediglich die Einträge von $(m_h)_{h \in H}$. Wählen wir auf \widetilde{M}^n die Produktmetrik d^n (mit $d^n((m_h)_{h \in H}, (m'_h)_{h \in H})^2 = \sum_{h \in H} d^n(m_h, m'_h)^2$), so ist diese Permutation isometrisch. Außerdem ist $\widetilde{M}^H / (G \wr H) \cong M^H / H$ als Projektion einer kompakten Mannigfaltigkeit kompakt. Bleibt zu zeigen, dass $G \wr H$ auch proper operiert.

Sei $(m,n) := ((m_h)_{h \in H}, (n_h)_{h \in H}) \in \widetilde{M}^H \times \widetilde{M}^H$. Da $G \wr H$ diskret ist, operiert $G \wr H$ nach [MS, Korollar 3.1.6] proper, wenn es für (m,n) eine Umgebung W gibt, so dass

$$Z := \left\{ (f,a) \in G \wr H \mid (f,a)m' = n' \text{ für } (m',n') \in W \right\}$$

endlich ist.

G operiert eigentlich diskontinuierlich auf \widetilde{M} , das heißt wir finden für alle m_h aus m Umgebungen \widetilde{U}_h , so dass $\widetilde{U}_h \cap g\widetilde{U}_h = \emptyset$ für alle $g \in G$ und analog auch Umgebungen \widetilde{V}_h für alle n_h aus n . Wähle $\frac{\varepsilon}{2}$ -Umgebungen U_h und V_h für alle $h \in H$ (also $\varepsilon > 0$ so, dass $d(m_h, m'_h) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow m'_h \in U_h$ und $d(m_h, m'_h) < \varepsilon \Rightarrow m'_h \in \widetilde{U}_h$ und analog für V_h).

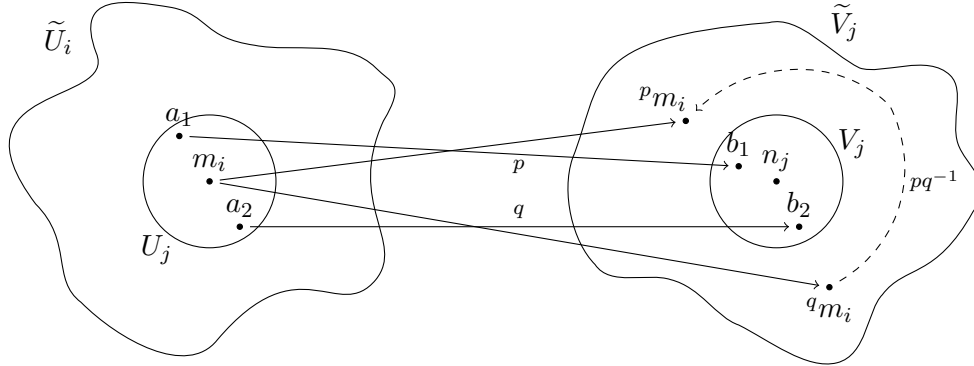
Wir wollen zeigen, dass es für zwei solche $\frac{\varepsilon}{2}$ -Umgebungen U_i und $V_j, i, j \in H$, höchstens ein $g \in G$ existiert mit $gU_i \cap V_j \neq \emptyset$. Wir nehmen also an zu $a_1, a_2 \in U_i$ und $b_1, b_2 \in V_j$ gebe es $p, q \in G, p \neq q$ mit ${}^p a_1 = b_1$ und ${}^q a_2 = b_2$. Es gilt

$$d(m_i, a_1) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } d(m_i, a_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da G isometrisch operiert, gilt dann auch

$$d({}^p m_i, b_1) = d({}^p m_i, {}^p a_1) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } d({}^q m_i, b_2) = d({}^q m_i, {}^q a_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also $d({}^p m_i, n_j), d({}^q m_i, n_j) < \varepsilon$ und damit ${}^p m_i, {}^q m_i \in \tilde{V}_j$, was zum Widerspruch $\tilde{V}_j \cap pq^{-1}\tilde{V}_j \neq \emptyset$ führt.



Für $i, j \in H$ gibt es also höchstens ein $g_{i,j} \in G$ mit $g_{i,j}U_i \cap V_j \neq \emptyset$. Wähle $W = (U_h, V_h)_{h \in H}$ als Umgebung von (m, n) . Sei $(f, a) \in Z$, also

$$\begin{aligned} & (f, a)(m'_h)_{h \in H} = (n'_h)_{h \in H} \quad \text{für ein } (m', n') \in W \\ \Leftrightarrow & \quad f(h)m'_h = n'_{a^{-1}h} \quad \text{für alle } h \in H \\ \Leftrightarrow & \quad f(h) = g_{h, a^{-1}h} \quad \text{für alle } h \in H. \end{aligned}$$

Damit ist f durch a schon eindeutig bestimmt. Da H endlich ist, muss also auch Z endlich sein. \square

3.2.1 Die *-Werkzeuge

Zusätzlich zu den Werkzeugen W1 bis W5 werden wir noch die folgenden Aussagen brauchen, die wir aber alle beweisen können, wenn wir die Werkzeuge W2 bis W5 voraussetzen.

*W6: FIC_{wF} gilt für endliche Gruppen.

*W7: FIC_{wF} gilt für abzählbare, freie Gruppen.

*W8: Seien G_1 und G_2 Gruppen die FIC_{wF} erfüllen. Dann gilt FIC_{wF} auch für $G_1 \times G_2$.

*W9: Seien G_1 und G_2 abzählbare Gruppen die FIC_{wF} erfüllen. Dann gilt FIC_{wF} auch für $G_1 * G_2$.

*W6 gilt sowieso in den meisten Fällen aufgrund von Lemma 3.3, aber auch sonst ist *W6 einfach ein Spezialfall von W3. Die restlichen *-Werkzeugen werden wir in diesem Kapitel beweisen. Außerdem werden wir zeigen, dass wir die Aussagen W3, W4 und W5 ohne Einschränkung von FIC auf $FICwF$ erweitern können:

*W3: $FICwF$ gilt für virtuell abelsche Gruppen.

*W4: Sei $\{G_i \mid i \in I\}$ ein gerichtetes System von Gruppen und für jedes G_i gelte $FICwF$. Dann gilt $FICwF$ auch für $\text{colim}_{i \in I} G_i$.

*W5: Sei $p : L \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus und $FICwF$ gelte für G . Ist $FICwF$ wahr für $p^{-1}(V)$ für jede virtuell zyklische Untergruppe V von G , dann gilt $FICwF$ auch für L .

Wenn W3 gilt, erhalten wir *W3 folgendermaßen.

Lemma 3.12 (*W3). *FIC gelte für virtuell abelsche Gruppen. Dann gilt auch $FICwF$ für virtuell abelsche Gruppen.*

Beweis. Sei G eine virtuell abelsche Gruppe und A eine abelsche Untergruppe von G mit endlichem Index. Sei H eine beliebige endliche Gruppe. A^H ist auch wieder abelsch und hat endlichen Index in G^H . G^H wiederum hat endlichen Index in $G \wr H$. Es ist also auch $G \wr H$ virtuell abelsch und erfüllt nach Voraussetzung FIC . \square

Ist die Gültigkeit von W4 gegeben, können wir für *W4 den Beweis von Lemma 3.5 nutzen: Da wir mit W4 die Verträglichkeit von FIC mit Kolimiten voraussetzen, brauchen wir nicht mehr wie in Lemma 3.5 eine streng stetige Homologietheorie fordern und der Rest des Beweises für die Verträglichkeit von $FICwF$ mit Kolimiten geht analog durch.

Für die Erweiterung von W5 auf *W5, müssen wir zuerst *W7 und *W8 beweisen. Wir benötigen dafür folgendes Hilfslemma:

Lemma 3.13. *Sei $FICwF$ eine endlich erweiterbare, gefaserte Isomorphismusvermutung, für die W2 und *W6 gilt. Sei M eine kompakte, geschlossene Fläche. Dann wird $FICwF$ von $\pi_1(M)$ erfüllt.*

Beweis. S^2 und $\mathbb{R}P^2$ erfüllen mit trivialer bzw. mit zyklischer Fundamentalgruppe der Ordnung 2 aufgrund von *W6 $FICwF$ und alle anderen kompakten, geschlossenen Flächen können mit einer nicht-positiven Metrik versehen werden, erfüllen also $FICwF$ aufgrund von W2. \square

Lemma 3.14 (*W7). *Sei $FICwF$ eine endlich erweiterbare, gefaserte Isomorphismusvermutung, für die W2, W4 und *W6 gilt. Dann ist $FICwF$ wahr für freie Gruppen mit abzählbar vielen Erzeugern, d.h. es gilt *W7.*

Beweis. Sei $F = \langle a_1, \dots, a_g \rangle$ eine endlich erzeugte freie Gruppe mit g Erzeugern, $g \geq 1$, und M eine kompakte Fläche vom Geschlecht g . Nach dem letzten Lemma 3.13 ist $FICwF$ wahr für

$$\pi_1(M) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g; [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \rangle.$$

Aufgrund des Freiheitssatzes von Magnus (siehe beispielsweise [MKS], Theorem 4.10) ist F eine frei erzeugte Untergruppe von $\pi_1(M)$ und erfüllt somit nach Lemma 3.2 $FICwF$.

Sei F nun eine freie Gruppe mit abzählbar vielen Erzeugern x_i , $i \in \mathbb{N}$. F_n sei die von $\{x_1, \dots, x_n\}$ erzeugte freie Gruppe. F_i ist Untergruppe von F_{i+1} und bezüglich dieser Inklusionen gilt

$$F \cong \operatorname{colim}_{i \rightarrow \infty} F_i.$$

Wie haben bereits gezeigt, dass $FICwF$ wahr ist für alle F_i , also aufgrund von *W4 auch für $\operatorname{colim}_{i \in \mathbb{N}} F_i = F$. \square

Im Folgenden sei jetzt $FICwF$ immer eine endlich erweiterbare, gefaserte Isomorphismusvermutung, für die W2, W3, W4 und W5 gilt. W1 wird erst wesentlich später eine Rolle spielen.

Lemma 3.15 (*W8). *Seien G_1 und G_2 Gruppen, für die $FICwF$ gilt, dann wird $FICwF$ auch von $G_1 \times G_2$ erfüllt, d.h. es gilt *W8.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass FIC für $G_1 \times G_2$ erfüllt ist und betrachten dazu die Projektion

$$p_1 : G_1 \times G_2 \rightarrow G_1.$$

Mit W5 genügt es zu zeigen, dass für jede virtuell zyklische Untergruppe V_1 von G_1 FIC von $p_1^{-1}(V_1) = V_1 \times G_2$ erfüllt wird. Dazu betrachten wir die Projektion

$$p_2 : V_1 \times G_2 \rightarrow G_2.$$

Wiederum mit W5 genügt es nun zu zeigen, dass FIC von $p_2^{-1}(V_2)$ erfüllt wird für alle virtuell zyklischen Untergruppen V_2 von G_2 . Es gilt $p_2^{-1}(V_2) = V_1 \times V_2$. Da V_1 und V_2 virtuell zyklisch sind, existieren zyklische Untergruppen $C_1 \subset V_1$ und $C_2 \subset V_2$ mit endlichem Index. Dann ist $C_1 \times C_2$ eine Untergruppe von $V_1 \times V_2$ mit

endlichem Index, die insbesondere abelsch ist. Mit W3 gilt also FIC für $V_1 \times V_2$ und damit auch für $G_1 \times G_2$.

Sei H eine beliebige endliche Gruppe. Nach Definition von $FICwF$ ist FIC wahr für $G_1 \wr H$ und $G_2 \wr H$. Es gilt also FIC für $(G_1 \wr H) \times (G_2 \wr H)$. Aufgrund von Lemma 1.19 ist $(G_1 \times G_2) \wr H$ eine Untergruppe von $(G_1 \wr H) \times (G_2 \wr H)$. Mit Lemma 3.2 überträgt sich FIC auf Untergruppen und damit ist $FICwF$ wahr für $G_1 \times G_2$. \square

Mit *W8 können wir die Aussage von Lemma 3.7 auf $FICwF$ erweitern und damit dann auch W5 auf *W5.

Lemma 3.16. *Sei $FICwF$ eine endlich erweiterbare, gefaserte Isomorphismusvermutung, für die *W8 gilt. Sei $p : K \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus. $FICwF$ sei erfüllt für (G, \mathcal{F}_G) und für $(p^{-1}(L), \mathcal{F}_{f^{-1}(L)})$ für alle $L \in \mathcal{F}_G$. Dann wird $FICwF$ auch von (K, \mathcal{F}_K) erfüllt.*

Beweis. Sei H ein beliebige endliche Gruppe der Ordnung n . Dann induziert p einen Gruppenhomomorphismus

$$\tilde{p} : K \wr H \rightarrow G \wr H, \quad (k, h) \mapsto (f \circ k, h).$$

Sei $V \in \mathcal{F}_{G \wr H}$. Für $G \wr H$ gilt nach Voraussetzung FIC . Um FIC für $(K \wr H)$ zu zeigen, reicht es aufgrund von Lemma 3.7 FIC für $\tilde{p}^{-1}(V)$ zu zeigen.

G^n ist Normalteiler von $G \wr H$ mit endlichem Index. $V \cap G^n \in \mathcal{F}_{G \wr H}$. Sei P_i die Projektion von $V \cap G^n$ auf die i -te Komponente. Da \mathcal{F} abgeschlossen unter Quotientenbildung ist, gilt $P_i \in \mathcal{F}_G$. Nach Voraussetzung gilt $FICwF$ für $\tilde{p}^{-1}(P_i)$, mit *W8 gilt $FICwF$ dann für $\prod_{1 \leq i \leq n} \tilde{p}^{-1}(P_i)$ und somit auch für $V \cap G^n$, da sich mit Lemma 3.2 $FICwF$ auf Untergruppen überträgt.

Da G^n als Normalteiler mit endlichem Index in $G \wr H$ liegt, ist $\tilde{p}^{-1}(V \cap G^n)$ normal in $\tilde{p}^{-1}(V)$ (für $x \in \tilde{p}^{-1}(v)$ und $y \in \tilde{p}^{-1}(w)$ mit $v \in V$ und $w \in V \cap G^n$ gilt $\tilde{p}(xyx^{-1}) = vwxv^{-1} \in V \cap G^n$) und hat auch endlichen Index, denn es gilt

$$|V/(V \cap G^n)| = |VG^n/G^n| \leq |(G \wr H)/G^n| < \infty.$$

Wir erhalten also die exakte Sequenz

$$1 \rightarrow \tilde{p}^{-1}(V \cap G^n) \xrightarrow{i} \tilde{p}^{-1}(V) \xrightarrow{pr \circ \tilde{p}} V/(V \cap G^n) \rightarrow 1$$

und somit gilt aufgrund von Satz 3.8 $FICwF$ für $\tilde{p}^{-1}(V)$ und insbesondere auch FIC , was zu zeigen war. \square

Korollar 3.17 (*W5). *Sei $FICwF$ eine gefaserte Isomorphismusvermutung, für die W5 und *W8 gilt. Dann gilt auch *W5, d.h. ist $p : K \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus und $FICwF$ gilt sowohl für G als auch für $p^{-1}(V)$ für alle virtuell zyklischen Untergruppe V von G , dann gilt $FICwF$ auch für K .*

Beweis. Die Voraussetzung von Lemma 3.16 sind erfüllt. Wählen wir V im Beweis von Lemma 3.16 als virtuell zyklische Untergruppe von $G \wr H$, dann können wir statt Lemma 3.7 einfach W5 anwenden und der Beweis geht völlig analog durch. \square

Die Aussage von *W9 zeigen wir zunächst für FIC , bevor wir sie mit Satz 3.23 dann auch für $FICwF$ beweisen. Der Aufbau des Beweises ist leicht abgeändert, aber sonst von Roushon übernommen [R1, Reduction Theorem und Theorem 3.1].

Satz 3.18. *Seien G_1 und G_2 abzählbare Gruppen, die FIC erfüllen. Dann wird FIC auch von dem freien Produkt $G_1 * G_2$ erfüllt.*

Für den Beweis benötigen wir Gruppenoperationen auf Bäumen. Für Details sei auf das Buch von Serre [Ser] verwiesen. Wir greifen zunächst auf folgenden Satz zurück.

Satz 3.19 ([Ser, Theorem 7]). *Sei $G = G_P *_A G_Q$ ein amalgamiertes Produkt von zwei Gruppen. Dann gibt es bis auf Isomorphie genau einen Baum X auf dem G operiert mit einem Segment $T = \underset{P}{\bullet} \xrightarrow{a} \underset{Q}{\bullet}$ als Fundamentalbereich, wobei P von G_P , Q von G_Q und a von A in X festgehalten wird.*

Für den Beweis von Satz 3.18 basteln wir daraus folgendes Lemma.

Lemma 3.20. *Zu einem freien Produkt $G_P * G_Q$ gibt es einen Baum X auf dem $G_P * G_Q$ operiert mit trivialen Kantenstandgruppen und die Eckenstandgruppen sind alle von der Gestalt gG_Pg^{-1} oder gG_Qg^{-1} für gewisse $g \in G_P * G_Q$.*

Beweis. Nach dem letzten Satz gibt es einen Baum X auf dem $G_P * G_Q$ operiert mit einem Segment $T = \underset{P}{\bullet} \xrightarrow{a} \underset{Q}{\bullet}$ als Fundamentalbereich. Zu jeder Ecke E von X gibt es daher ein $g \in G_P * G_Q$ mit $gP = E$ oder $gQ = E$ und somit ist jede Eckenstandgruppe zu G_P oder G_Q konjugiert, was man wie folgt einsieht:

Sei G_E die Standgruppe einer Ecke E . Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass E zur Bahn von P gehört. Der andere Fall verläuft völlig analog. Es gibt also ein $g \in G_P * G_Q$ mit $gP = E$. Für alle $h \in G_E$ wird P von $g^{-1}hg$ festgehalten und damit $h \in gG_Pg^{-1}$ und umgekehrt wird E von jedem Element aus gG_Pg^{-1} festgehalten, denn $gg_1g^{-1}E = gg_1P = gP = E$ für $g_1 \in G_P$.

a wird nur von der trivialen Gruppe festgehalten. Mit einer analogen Argumentation, bei der lediglich G_P durch die triviale Gruppe ersetzt wird, folgt, dass alle Kantenstandgruppen trivial sein müssen. \square

Beweis von Satz 3.18. Wir betrachten die kanonische Projektion

$$\pi : G_1 * G_2 \rightarrow G_1 \times G_2.$$

Nach Voraussetzung ist FIC wahr für G_1 und G_2 also mit *W8 auch für $G_1 \times G_2$. Mit W5 reicht es nun zu zeigen, dass für jede virtuell zyklische Untergruppe V von $G_1 \times G_2$ FIC für das Urbild $\pi^{-1}(V) \subset G_1 * G_2$ wahr ist. Wir zeigen mit dem nächsten Lemma, dass es in dieser Situation eine abzählbare freie Gruppe F und eine endliche Gruppe H gibt, so dass

$$\pi^{-1}(V) \subset F \wr H$$

gilt. Mit Lemma 3.14 erhalten wir $FICwF$ für F . FIC vererbt sich dann mit Lemma 3.2 von $F \wr H$ auf die Untergruppe $\pi^{-1}(V)$. \square

Lemma 3.21. *Seien G_1 und G_2 abzählbare Gruppen, V eine virtuell zyklische Untergruppe von $G_1 \times G_2$ und*

$$\pi : G_1 * G_2 \rightarrow G_1 \times G_2$$

der kanonisch gegebene surjektive Gruppenhomomorphismus. Dann gibt es eine abzählbare freie Gruppe F und eine endliche Gruppe H , so dass $\pi^{-1}(V)$ Untergruppe von $F \wr H$ ist.

Beweis. 1. Fall: V hat endliche Ordnung.

Wir betrachten folgende exakte Sequenz

$$1 \rightarrow \ker(\pi) \rightarrow \pi^{-1}(V) \rightarrow V \rightarrow 1.$$

Nach Satz 1.17 ist $\pi^{-1}(V)$ Untergruppe von $\ker(\pi) \wr V$. Nach Voraussetzung ist V endlich. Bleibt zu zeigen, dass $\ker(\pi)$ frei ist. Wir benutzen Lemma 3.20. Demnach operiert das freie Produkt $G_1 * G_2$ auf einem Baum \mathcal{T} mit trivialen Kantenstandgruppen und die Eckenstandgruppen haben die Gestalt gG_1g^{-1} oder gG_2g^{-1} für bestimmte $g \in G_1 * G_2$. $\ker(\pi)$ operiert als Untergruppe von $G_1 * G_2$ ebenfalls auf \mathcal{T} und zwar mit Eckenstandgruppen $\ker(\pi) \cap gG_i g^{-1}$, $i \in \{1, 2\}$.

Sei $ghg^{-1} \in \ker(\pi) \cap gG_i g^{-1}$ ein Element, dass eine Ecke von \mathcal{T} festhält und sei $(g_1, g_2) := \pi(g)$. Wir nehmen $h \in G_1$ an. Der andere Fall geht analog. Es gilt

$$1 = \pi(ghg^{-1}) = \pi(g)\pi(h)\pi(g^{-1}) = (g_1hg_1^{-1}, g_2g_2^{-1}).$$

Aus $g_1hg_1^{-1} = 1$ folgt $h = 1$ und damit sind alle Standgruppen $\ker(\pi) \cap gG_i g^{-1}$ trivial. $\ker(\pi)$ operiert also frei auf \mathcal{T} und ist damit auch als Gruppe frei ([Ser, Theorem 4]).

2. Fall: V hat unendliche Ordnung.

Da V virtuell zyklisch ist, gibt es eine unendliche zyklische Untergruppe C von V mit endlichem Index. C kann ohne Einschränkung als normale Untergruppe gewählt werden. Wir zeigen in Lemma 3.22, dass dies tatsächlich keine Einschränkung ist. Wir betrachten nun folgende exakte Sequenz von Gruppen

$$1 \rightarrow \pi^{-1}(C) \xrightarrow{i} \pi^{-1}(V) \xrightarrow{pr \circ \pi} V/C \rightarrow 1,$$

wobei $pr : V \rightarrow V/C$ die kanonische Projektion ist. Mit Satz 1.17 ist $\pi^{-1}(V)$ Untergruppe von $\pi^{-1}(C) \wr V/C$. V/C ist endlich. Es bleibt lediglich zu zeigen, dass $\pi^{-1}(C)$ frei ist.

Wir nehmen dazu wieder die Operation von $G_1 * G_2$ auf einem Baum \mathcal{T} zur Hilfe. Als Untergruppe von $G_1 * G_2$ operiert auch $\pi^{-1}(C)$ auf \mathcal{T} . Wir haben bereits im ersten Fall gezeigt, dass $\ker(\pi) \cap gG_i g^{-1}$ trivial ist. π eingeschränkt auf die Eckenstandgruppen $gG_i g^{-1}$ für $i = 1, 2$ ist also injektiv und damit insbesondere auf $\pi^{-1}(C) \cap gG_i g^{-1}$ injektiv. $\pi^{-1}(C) \cap gG_i g^{-1}$ ist also isomorph zu einer Untergruppe von C und damit entweder trivial oder wie C ebenfalls unendlich zyklisch. $\pi^{-1}(C)$ operiert also auf \mathcal{T} mit trivialen Kantenstandgruppen und die Eckenstandgruppen sind alle entweder trivial oder frei mit einem Erzeuger. $\pi^{-1}(C)$ ist damit ein freies Produkt von freien Gruppen (siehe beispielsweise [Ba, VII, Theorem 2] oder [Ser, 5.4, Theorem 12]), also selbst eine freie Gruppe. \square

Lemma 3.22. *Sei V eine virtuell zyklische Gruppe. Dann besitzt V einen zyklischen Normalteiler N mit endlichem Index.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine zyklische Untergruppe C von V mit endlichem Index. $N := \bigcap_{g \in V} gCg^{-1}$ ist ein Normalteiler von V . Da V endlich erzeugt ist, gibt es nur endlich viele Untergruppen von V mit Index $[V : C]$ (siehe beispielsweise [Ba, Kapitel III, Theorem 3]). Es gibt also eine endliche Teilmenge $H \subset V$ mit $N = \bigcap_{g \in H} gCg^{-1}$. N ist als endlicher Schnitt von zyklischen Untergruppen mit endlichem Index selbst wieder zyklisch mit endlichem Index. \square

Wir haben nun die Verträglichkeit von FIC mit dem freien Produkt bewiesen. Jetzt fehlt sie noch für $FICwF$.

Satz 3.23 (*W9). *Sei $FICwF$ eine endlich erweiterbare, gefaserte Isomorphismusvermutung, für die $W2$, $W3$, $W4$ und $W5$ gilt. Seien G_1 und G_2 abzählbare Gruppen, die $FICwF$ erfüllen. Dann wird $FICwF$ auch von dem freien Produkt $G_1 * G_2$ erfüllt.*

Beweis. Sei H eine endliche Gruppe. Die surjektive Abbildung

$$\pi : G_1 * G_2 \rightarrow G_1 \times G_2$$

lässt sich erweitern zu der surjektiven Abbildung

$$\begin{aligned} p : (G_1 * G_2) \wr H &\rightarrow (G_1 \times G_2) \wr H \\ (f : H \rightarrow G_1 * G_2, h) &\mapsto (\pi \circ f, h). \end{aligned}$$

Mit Lemma 3.15 wissen wir, dass $FICwF$ für $G_1 \times G_2$, also FIC für $(G_1 \times G_2) \wr H$ gilt. Wir betrachten eine beliebige virtuell zyklische Untergruppe V von $(G_1 \times G_2) \wr H$ und zeigen, dass das FIC von dem Urbild $p^{-1}(V)$ erfüllt wird. Da wir $W5$ gefordert hatten, ist dann auch FIC für $(G_1 * G_2) \wr H$ wahr.

In V finden wir einen zyklischen Normalteiler C mit endlichem Index (Lemma 3.22). Sei $\gamma = (f, h)$ der Erzeuger von C . Da H endlich ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ und ein $g \in (G_1 \times G_2)^H$ mit $\gamma^k = (g, 1)$. Setze

$$C' := \langle \gamma^k \rangle = C \cap ((G_1 \times G_2)^H \times \{1\}).$$

C' hat endlichen Index in C und damit auch in V . C ist normal in V und $(G_1 \times G_2)^H \times \{1\}$ normal in $(G_1 \times G_2) \wr H$ und damit ist C' normal in V . Das liefert uns folgende exakte Sequenz von Gruppen:

$$1 \rightarrow p^{-1}(C') \rightarrow p^{-1}(V) \rightarrow V/C' \rightarrow 1. \quad 3.24$$

Wir betrachten C' nun als Untergruppe von $(G_1 \times G_2)^{|H|} \cong (G_1 \times G_2)^H \times \{1\}$. Sei $(\gamma_1, \dots, \gamma_n), n := |H|$ der Erzeuger von C' . Es gilt

$$p^{-1}(C') \subset \pi^{-1}(\langle \gamma_1 \rangle) \times \pi^{-1}(\langle \gamma_2 \rangle) \times \dots \times \pi^{-1}(\langle \gamma_n \rangle).$$

Nach Lemma 3.21 ist für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ die Gruppe $\pi^{-1}(\langle \gamma_i \rangle)$ eine Untergruppe eines Kranzproduktes $F_i \wr H_i$ mit einer abzählbaren freien Gruppe F_i und einer

endlichen Gruppe H_i . Mit der exakten Sequenz 3.24 erhalten wir

$$\begin{aligned}
 p^{-1}(V) & \stackrel{1.17}{\subset} p^{-1}(C') \wr (V/C') \\
 & \stackrel{1.18}{\subset} [(F_1 \wr H_1) \times (F_2 \wr H_2) \times \cdots \times (F_n \wr H_n)] \wr (V/C') \\
 & \stackrel{1.19}{\subset} [(F_1 \wr H_1) \wr (V/C)] \times \cdots \times [(F_n \wr H_n) \wr (V/C')] \\
 & \stackrel{1.21}{\subset} F_1 \wr (H_1 \wr (V/C)) \times \cdots \times F_n \wr (H_n \wr (V/C')).
 \end{aligned}$$

Jede Gruppe $F_i \wr (H_i \wr (V/C'))$ erfüllt nach Lemma 3.14 *FIC*, da die F_i frei und die $H_i \wr (V/C')$ endlich sind. Für $F_1 \wr (H_1 \wr (V/C)) \times \cdots \times F_n \wr (H_n \wr (V/C'))$ gilt also *FIC* aufgrund von Lemma 3.15 und mit Lemma 3.2 überträgt sich *FIC* auf die Untergruppe $p^{-1}(V)$. \square

Wir haben somit in diesem Kapitel gezeigt, dass wenn für eine endlich erweiterbare, gefaserte Isomorphismusvermutung W1 bis W5 gilt, dann gilt auch *W3 bis *W9.

4 Der rote Baum

4.1 Die Wurzel

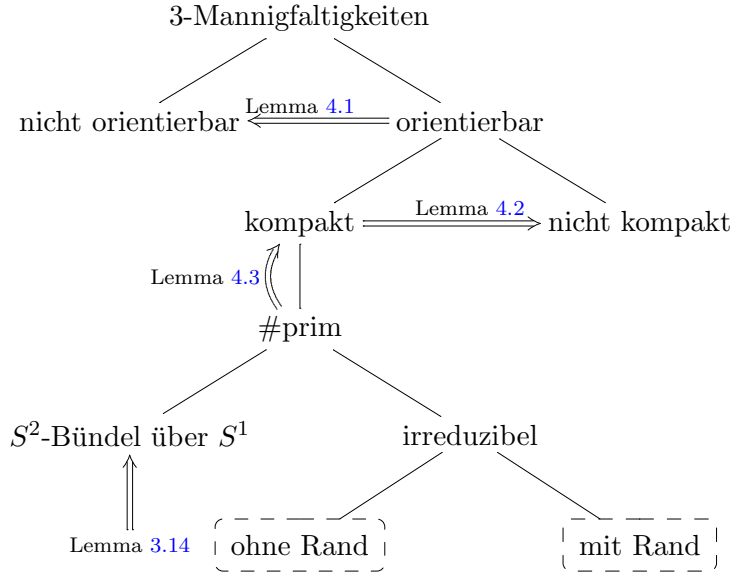
FIC sei von nun an eine „gefaserte Isomorphismusvermutung mit Werkzeugkasten“, d.h. eine gefaserte Isomorphismusvermutung für die $W1$ bis $W5$ gilt und damit auch $*W3$ bis $*W9$. Entsprechend sei $FICwF$ eine „endlich erweiterbare gefaserte Isomorphismusvermutung mit Werkzeugkasten“.

Mit unserem Werkzeugkasten ausgerüstet, wagen wir uns nun an den Beweis für unseren

Zielsatz. *Sei M eine 3-Mannigfaltigkeit und $FICwF$ eine endlich erweiterbare, gefaserte Isomorphismusvermutung mit Werkzeugkasten. Dann gilt $FICwF$ für $\pi_1(M)$.*

Die Suche nach einem „roten Faden“, der die vor allem in [R1] und [R2] verstreuten Bauklötzchen zu einem nachvollziehbaren Beweis aneinanderreicht, hat einen recht verzweigten „roten Baum“ hervorgebracht. Zur besseren Übersicht wird dieser rote Baum als Diagramm parallel zur Beweisführung mitentwickelt. Dabei zeigen einfache Verzweigungen immer Fallunterscheidungen an, die aus der Struktur der 3-Mannigfaltigkeiten gewonnen werden. Durchgezogene Umrandungen kennzeichnen Typen von 3-Mannigfaltigkeiten, für die wir bereits bewiesen haben, dass $FICwF$ gilt, für gestrichelt umrandete Fälle müssen wir den Beweis noch führen. Doppelpfeile machen deutlich, welche Fälle in Beweisen für andere Fälle benötigt werden und wo welche Lemmata und Sätze eingehen. Wir werden am Ende sehen, dass wir nur knapp an einem Ringschluss vorbeischrappen.

Der erste Schritt auf unserem Weg zum Zielsatz besteht darin zu zeigen, dass wir nicht an beliebigen 3-Mannigfaltigkeiten herumklempnern müssen, sondern wir uns auf orientierbare, kompakte, irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten beschränken können. Das folgende erste Baumdiagramm verdeutlicht, wie wir dabei vorgehen werden. Anschließend haben wir dann zwei größere Bauklötze vor uns, die wir getrennt behandeln werden: Orientierbare, kompakte, irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten mit Rand und ohne Rand.



Mit der Sprechweise, dass „ $FIC(wF)$ für eine Mannigfaltigkeit“ gilt, meinen wir im Folgenden immer, dass $FIC(wF)$ für die Fundamentalgruppe der Mannigfaltigkeit wahr ist.

Lemma 4.1. *$FICwF$ sei für orientierbare 3-Mannigfaltigkeiten wahr. Dann gilt $FICwF$ schon für beliebige 3-Mannigfaltigkeiten.*

Beweis. Jede nicht-orientierbare 3-Mannigfaltigkeit M besitzt eine 2-blättrige orientierbare Überlagerung \tilde{M} , die man über die von allen Orientierungserhaltenden Wegen erzeugte Untergruppe von $\pi_1(M)$ erhält. Für Details sei auf das 3. Beispiel in [ST, §75] verwiesen. $\pi_1(\tilde{M})$ hat Index 2 in $\pi_1(M)$, ist also Normalteiler. Gilt $FICwF$ für \tilde{M} , dann überträgt sich mit Satz 3.8 $FICwF$ auch auf die überlagerte Mannigfaltigkeit M . \square

Im Folgenden sind deshalb, auch wenn wir es nicht mehr dazu schreiben, ohne Ausnahme alle Mannigfaltigkeiten, die wir betrachten, orientierbar und außerdem, aufgrund der beiden folgenden Lemmata, in aller Regel kompakt und irreduzibel.

Lemma 4.2. *$FICwF$ sei für kompakte Mannigfaltigkeiten mit Rand wahr. Dann gilt $FICwF$ schon für nicht-kompakte 3-Mannigfaltigkeiten.*

Beweis. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Einbettung $i : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass $0 \notin i(M)$. Sei d die Standardmetrik auf \mathbb{R}^n . Die Verknüpfung

$$M \xrightarrow{i} \mathbb{R}^n \xrightarrow{d(-,0)} \mathbb{R}$$

ist differenzierbar und die Menge der regulären Werte von $i \circ d(-, 0)$ liegt somit dicht in \mathbb{R} (Satz von Sard, siehe beispielsweise [BJ, Satz 6.1]). Wir finden somit eine bezüglich Inklusion aufsteigende Folge von kompakten Mannigfaltigkeiten mit Rand

$$(M_r)_{r \in I} := i^{-1}(B_r(0) \cap i(M))_{r \in I},$$

wobei $B_r(0)$ der abgeschlossene Ball um 0 mit Radius r ist, die uns eine Folge von Fundamentalgruppen $(\pi_1(M_r))_{r \in I}$ liefert mit $\text{colim}_{r \in I} \pi_1(M_r) = \pi_1(M)$. Gilt also $FICwF$ für kompakte 3-Mannigfaltigkeiten mit Rand, dann ist mit *W4 auch $FICwF$ für nicht-kompakte 3-Mannigfaltigkeiten wahr. \square

Lemma 4.3. *Sei M eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

$$\pi_1(M) = \pi_1(M_1) * \dots * \pi_1(M_n) * F,$$

wobei die M_i irreduzible, kompakte 3-Mannigfaltigkeiten sind und F eine freie Gruppen von endlichem Rang ist.

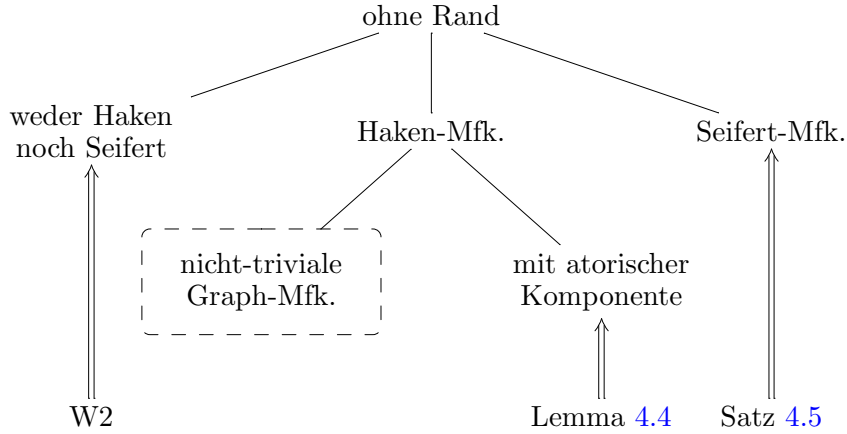
Beweis. M lässt sich als endliche zusammenhängende Summe $M_1 \# \dots \# M_k = M$ von Prim-Mannigfaltigkeiten schreiben (Satz 1.2). Weiterhin ist jede Prim-Mannigfaltigkeit entweder irreduzibel oder ein S^2 -Bündel über S^1 (Lemma 1.4). Ist M_i ein S^2 -Bündel über S^1 , erhalten wir mit der langen exakten Homotopiesequenz $\pi_1(M_i) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, da die Fasern zusammenhängend sind und triviale Fundamentalgruppe haben. Mit dem Satz von Seifert und van Kampen (siehe beispielsweise [Mas, IV.§3, Theorem 3.1]) erhalten wir $\pi_1(M)$ aus der zusammenhängenden Summe der Mannigfaltigkeiten M_i als ein freies Produkt der Fundamentalgruppen $\pi_1(M_i)$, wobei sich die Fundamentalgruppen der nicht irreduziblen M_i zu einer freien Gruppe F von endlichem Rang zusammenfassen lassen. \square

Wir wissen mit *W9 (Satz 3.23) bereits, dass $FICwF$ mit dem freien Produkt verträglich ist und mit *W7 (Lemma 3.14) hatten wir gezeigt, dass $FICwF$ für abzählbare, freie Gruppen wahr ist. Mit Lemma 4.3 brauchen wir $FICwF$ also lediglich noch für kompakte, irreduzible 3-Mannigfaltigkeitsgruppen zu zeigen, um $FICwF$ für beliebige 3-Mannigfaltigkeitsgruppen zu bekommen. Halten wir also unser erstes Etappenziel fest:

Etappe 1. *Gilt $FICwF$ für orientierbare, kompakte, irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten, dann gilt $FICwF$ schon für beliebige 3-Mannigfaltigkeiten.*

4.2 Ohne-Rand-Ast

Wir schauen uns zunächst kompakte, irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten ohne Rand genauer an.



Für 3-Mannigfaltigkeiten mit endlicher Fundamentalgruppe hatten wir mit *W6 gefordert, dass $FICwF$ gilt. Im Folgenden ist also ohne Einschränkung $\pi_1(M)$ unendlich. Für kompakte, orientierbare, irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten M mit unendlicher Fundamentalgruppe, die weder Haken- noch Seifert-Mannigfaltigkeiten sind, besagt die Geometrisierungsvermutung von Thurston (siehe [Sco, §6]), dass man eine hyperbolische Metrik findet. Dank des Ergebnisses von Perelman [Pe] können wir also auf 3-Mannigfaltigkeiten, die weder Seifert- noch Haken-Mannigfaltigkeit sind, $W2$ anwenden.

Für Haken-Mannigfaltigkeiten machen wir die weitere Unterscheidung, ob die Toruszerlegung eine atorische Komponente besitzt oder nur aus Seifert-Komponenten besteht. Für den ersten Fall beweisen wir folgendes Lemma:

Lemma 4.4 ([R1, Korollar 4.1]). *Sei M eine geschlossene Haken-3-Mannigfaltigkeit, deren Toruszerlegung eine atorische Komponente besitzt. Dann wird $FICwF$ von $\pi_1(M)$ erfüllt.*

Beweis. Leeb hat mit Satz 3.3 in [Le] gezeigt, dass sich für M eine nicht-positiv gekrümmte Metrik wählen. Mit $W2$ gilt also $FICwF$ für $\pi_1(M)$. \square

Für den Fall der geschlossenen, nicht-trivialen Graph-Mannigfaltigkeit benötigen wir $FICwF$ für 3-Mannigfaltigkeiten mit Rand, wofür wir wiederum $FICwF$ für

geschlossene Seifert-Mannigfaltigkeiten brauchen. Denen widmen wir uns deshalb mit dem nächsten Satz.

Satz 4.5. *Sei S eine geschlossene Seifert-Mannigfaltigkeit. Dann ist $FICwF$ erfüllt für $\pi_1(S)$.*

Beweis. Wir lehnen uns an den Beweis an, den Roushon in [R1, Theorem 4.6] für beliebige Seifert-Mannigfaltigkeiten gibt, wandeln ihn aber so ab, dass wir als Voraussetzung $FICwF$ lediglich für virtuell abelsche statt für virtuelle poly- \mathbb{Z} -Gruppen benötigen.

Wir erinnern an die Präsentation, die wir in Satz 1.6 für Seifert-Mannigfaltigkeiten gesehen haben. Da S keine Randkomponenten besitzt, gilt

$$\begin{aligned} \pi_1(S) = \langle & a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_q, t; \\ & a_i t a_i^{-1} = t^{\varepsilon_i}, b_i t b_i^{-1} = t^{\delta_i}, c_j t c_j^{-1} = t^{\eta_j}, c_j^{\alpha_j} = t^{\beta_j}, \\ & c_q = [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] c_1 \dots c_{q-1} \rangle \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \pi_1(S) = \langle & a_1, \dots, a_g, c_1, \dots, c_q, t; \\ & a_i t a_i^{-1} = t^{\varepsilon_i}, c_j t c_j^{-1} = t^{\delta_j}, c_j^{n_j} = t^{s_j}, \\ & c_q = a_1^2 \dots a_g^2 c_1 \dots c_{q-1} \rangle. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist die von t erzeugte zyklische Untergruppe $\langle t \rangle$ normal in $\pi_1(S)$ und liefert uns somit folgende exakte Sequenz:

$$1 \rightarrow \langle t \rangle \rightarrow \pi_1(S) \xrightarrow{p} \pi_1(S)/\langle t \rangle \rightarrow 1,$$

wobei

$$\begin{aligned} \pi_1(S)/\langle t \rangle = \langle & a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_q; \\ & c_1^{n_1} = \dots = c_q^{n_q} = 1, c_q = [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] c_1 \dots c_{q-1} \rangle \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \pi_1(S)/\langle t \rangle = \langle & a_1, \dots, a_g, c_1, \dots, c_q; \\ & c_1^{n_1} = \dots = c_q^{n_q} = 1, c_q = a_1^2 \dots a_g^2 c_1 \dots c_{q-1} \rangle \end{aligned}$$

die Gestalt einer Orbifold-Fundamentalgruppe hat. An der Präsentation sieht man schon, dass $\pi_1(S)/\langle t \rangle$ die Fundamentalgruppe einer geschlossenen Fläche enthält.

Tatsächlich findet man auch eine Flächengruppe G , die endlichen Index in $\pi_1(S)/\langle t \rangle$ hat. Hempel beweist das beispielsweise in [H, Theorem 12.2(i)] oder auch in Bemerkungen verstreut zu finden bei Scott [Sco], die Martino in [Mar, Theorem 2.2] zusammengefasst hat. Da mit *W6 $FICwF$ für endliche Gruppen gilt, können wir $\pi_1(S)$ als unendlich und damit $\langle t \rangle$ als unendlich zyklisch annehmen¹. Mit Lemma 3.13 ist $FICwF$ für G erfüllt und da $\pi_1(S)/\langle t \rangle$ endlich erzeugt ist, gilt aufgrund von Korollar 3.9 $FICwF$ auch für $\pi_1(S)/\langle t \rangle$.

Sei V eine virtuell zyklische Untergruppe von $\pi_1(S)/\langle t \rangle$. V besitzt eine normale zyklische Untergruppe C mit endlichem Index in V (Lemma 3.22), die uns folgende exakte Sequenz liefert.

$$1 \rightarrow \langle t \rangle \rightarrow p^{-1}(C) \xrightarrow{p} C \rightarrow 1.$$

Ist C endlich, dann ist $\langle t \rangle$ ein Normalteiler mit endlichem Index in $p^{-1}(C)$ und erfüllt als freie Gruppe darüber hinaus $FICwF$. Mit Satz 3.8 gilt also $FICwF$ auch für $p^{-1}(C)$.

Ist C unendlich zyklisch, dann gibt es einen Schnitt $s : C \rightarrow p^{-1}(C)$ und aufgrund von Lemma 1.14 gilt $p^{-1}(C) \cong \langle t \rangle \rtimes C \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$. Somit wirkt $\langle t \rangle$ auf C entweder trivial oder mit $t^n c \mapsto (-1)^n c$. Im ersten Fall ist $\langle t \rangle \rtimes C \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und erfüllt damit als abelsche Gruppe $FICwF$ nach Voraussetzung *W3. Im zweiten Fall wirkt $\langle t^2 \rangle$ trivial auf C und wir haben mit $\langle t^2 \rangle \times C$ einen abelschen Normalteiler mit endlichem Index von $\langle t \rangle \rtimes C$. Es ist damit ebenfalls *W3 anwendbar.

Mit

$$1 \rightarrow p^{-1}(C) \rightarrow p^{-1}(V) \rightarrow V/C \rightarrow 1$$

sehen wir, dass wir mit $p^{-1}(C)$ eine normale Untergruppe von $p^{-1}(V)$ mit endlichem Index gefunden haben, die $FICwF$ erfüllt. Es kommt erneut Satz 3.8 zum Einsatz, womit sich $FICwF$ zunächst auf $p^{-1}(V)$ überträgt und mit *W5 dann weiter auf $\pi_1(S)$. \square

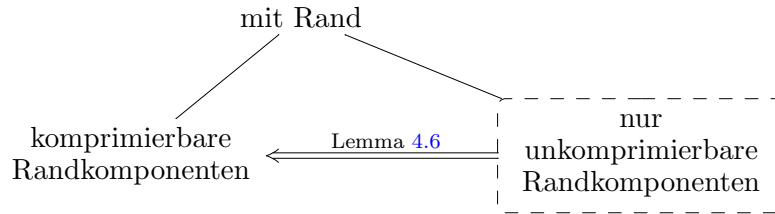
Mit dem gerade Gezeigten und Etappe 1 können wir also folgenden Stand festhalten.

Etappe 2. *$FICwF$ gilt für geschlossene Haken-Mannigfaltigkeiten mit atorischer Komponente und für geschlossene Seifert-Mannigfaltigkeiten. Ist $FICwF$ für kompakte, irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten mit Rand und für nicht-triviale Graph-Mannigfaltigkeiten ohne Rand erfüllt, dann gilt $FICwF$ schon für beliebige 3-Mannigfaltigkeiten.*

¹Dies ist für den Beweis nicht zwingend erforderlich, erspart aber ein paar Fallunterscheidungen

4.3 Mit-Rand-Ast

Mit Lemma 4.3 hatten wir gesehen, dass wir kompakte 3-Mannigfaltigkeiten so zerlegen können, dass wir, bis auf eine zusätzliche endlich erzeugte freie Gruppe, die Fundamentalgruppe als freies Produkt von Fundamentalgruppen von irreduziblen 3-Mannigfaltigkeiten erhalten. Wir werden jetzt zeigen, dass wir irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten mit komprimierbarem Rand noch weiter zerlegen können, so dass wir, wieder bis auf eine zusätzliche endlich erzeugte freie Gruppe, die Fundamentalgruppe als freies Produkt von Fundamentalgruppen von irreduziblen Mannigfaltigkeiten mit unkomprimierbarem Rand bekommen.



Lemma 4.6. *Sei M eine kompakte, zusammenhängende, nicht einfach-zusammenhängende, irreduzible 3-Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann gilt*

$$\pi_1(M) \cong \pi_1(M_1) * \dots * \pi_1(M_k) * F,$$

wobei die $M_i, i = 1, \dots, k$ kompakte irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten mit unkomprimierbarem Rand sind und F eine freie Gruppe mit endlichem Rang ist.

Wir benutzen für den Beweis dieses Lemmas den Schleifensatz von Papakyriakopoulos [Pa, Theorem 1] in einer von Stallings erweiterten Fassung [Sta, Generalized loop theorem].

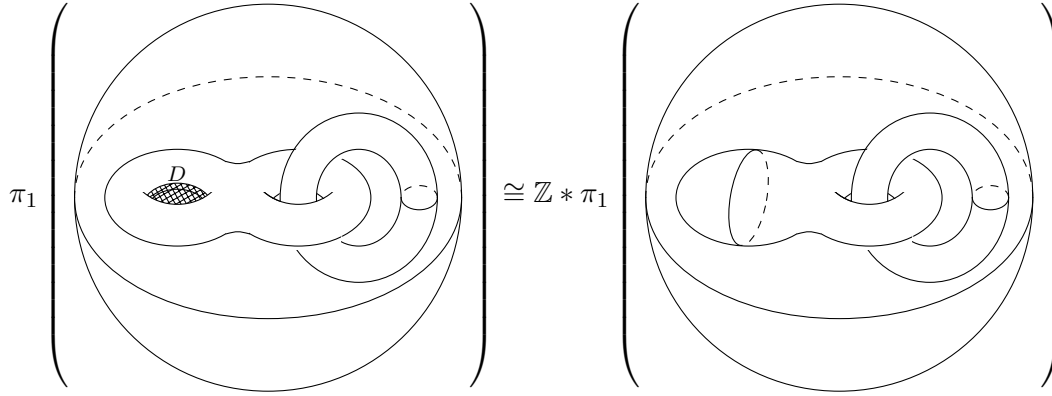
Satz 4.7 (Schleifensatz). *Sei M eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit mit Rand und B eine Randkomponente von M . Sei G eine normale Untergruppe von $\pi_1(B)$. Gibt es im Kern der Abbildung $\pi_1(B) \rightarrow \pi_1(M)$ Elemente, die nicht in G liegen, dann existiert ein einfacher geschlossener Weg γ in B , der eine in M eingebettete 2-Disk berandet, so dass $[\gamma] \notin G$.*

Wählen wir $G = 1$, erhalten wir folgendes Korollar:

Korollar 4.8. *Sei M eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit mit Rand und B eine Randkomponente von M . Gibt es einen einfachen geschlossenen, nicht nullhomotopen Weg γ in B , der in M nullhomotop ist, dann berandet γ in M eine eingebettete 2-Disk.*

Die Idee für Lemma 4.6 ist, die Mannigfaltigkeit an komprimierbaren 2-Disks, die uns Korollar 4.8 liefert, aufzutrennen, bis alle Randflächen unkomprimierbar sind.

Beispielsweise für eine D^3 aus der ein Volltorus und Vollfläche vom Geschlecht 2 entfernt wurden, die ineinander hängen², findet man eine komprimierbare Disk D , die eine Zerlegung in folgendes freies Produkt ermöglicht:



Damit wir zeigen können, dass tatsächlich jede Zusammenhangskomponente M_i , die dabei entsteht, einen Rand hat, benötigen wir für den Beweis von Lemma 4.6 noch das folgende Lemma. In einem späteren Abschnitt werden wir die Aussage von Lemma 4.9 auch für nicht-kompakte Mannigfaltigkeiten brauchen, weshalb wir sie hier gleich mitbeweisen.

Lemma 4.9. *Sei M eine nicht einfach-zusammenhängende, irreduzible 3-Mannigfaltigkeit, die entweder kompakt mit Rand oder nicht-kompakt ist. Dann besitzt jede kompakte, zusammenhängende, aber nicht einfach-zusammenhängende 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit N von M mindestens eine Randkomponente vom Geschlecht ≥ 1 .*

Beweis. Angenommen alle Randkomponenten von N sind vom Geschlecht 0, also zweidimensionale Sphären S_1, \dots, S_n . Da M irreduzibel ist, berandet jede der S_i eine eingebettete 3-Disk $D_i \subset M$. $M \setminus S_i$ ist nicht zusammenhängend für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, denn andernfalls gäbe es im Widerspruch dazu, dass M irreduzibel ist, ein S^2 -Bündel über S^1 in M ([H, Lemma 3.8]). Da N zusammenhängend ist, gilt entweder $N \subseteq D_i$ oder $N \subseteq M \setminus \overset{\circ}{D}_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

²Das ist zwar eigentlich kein zulässiges Beispiel, weil diese Mannigfaltigkeit nicht irreduzibel ist, aber es veranschaulicht den Vorgang sehr gut.

Nehmen wir $N \subset D_k$ für ein $k \in \{1, \dots, n\}$ an, dann berandet jede andere Randkomponente $S_i, i \neq k$ eine 3-Disk $D_i \subset \overline{D_k \setminus N}$. Wir können die D_i einfach entlang der S_i in N einkleben ohne die Fundamentalgruppen von N zu verändern und erhalten im Widerspruch dazu, dass N nicht einfach-zusammenhängend ist $\pi_1(N) = \pi_1(N \cup \bigcup_{i \neq k} D_i) = \pi_1(D_k)$. Es muss also $N \subset M \setminus \overset{\circ}{D}_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gelten. Dann ist aber $N' := N \cup \bigcup_{i=1}^n D_i$ eine geschlossene, kompakte 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M . Das ist aber ebenfalls ein Widerspruch, da M entweder als kompakt mit Rand oder als nicht-kompakt vorausgesetzt war. \square

Beweis von Lemma 4.6. Da M irreduzibel und nicht einfach-zusammenhängend ist, sind alle Randkomponenten von M Flächen vom Geschlecht ≥ 1 . Sei also Q eine Randkomponente von M mit Geschlecht ≥ 1 , die komprimierbar in M ist, das heißt der Kern der Abbildung $f : \pi_1(Q) \rightarrow \pi_1(N)$ ist nicht trivial.

Sei $\gamma \in \ker f$. Mit Korollar 4.8 erhalten wir eine eingebettete 2-Disk $D \subset M$ mit $\gamma = \partial D \subset Q$. Wir trennen M an dieser Disk auf und erhalten eine Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ mit einer oder zwei Zusammenhangskomponenten mit Rand. Einfach-zusammenhängende Zusammenhangskomponenten von N brauchen wir für die Zerlegung der Fundamentalgruppe von M nicht weiter berücksichtigen. Bei nicht einfach-zusammenhängenden Zusammenhangskomponenten können wir S^2 -Löcher einfach mit 3-Disks stopfen, ohne dass sich die Fundamentalgruppe ändert. Mit Lemma 4.9 wissen wir, dass dabei mindestens eine Randkomponente vom Geschlecht ≥ 1 übrig bleibt.

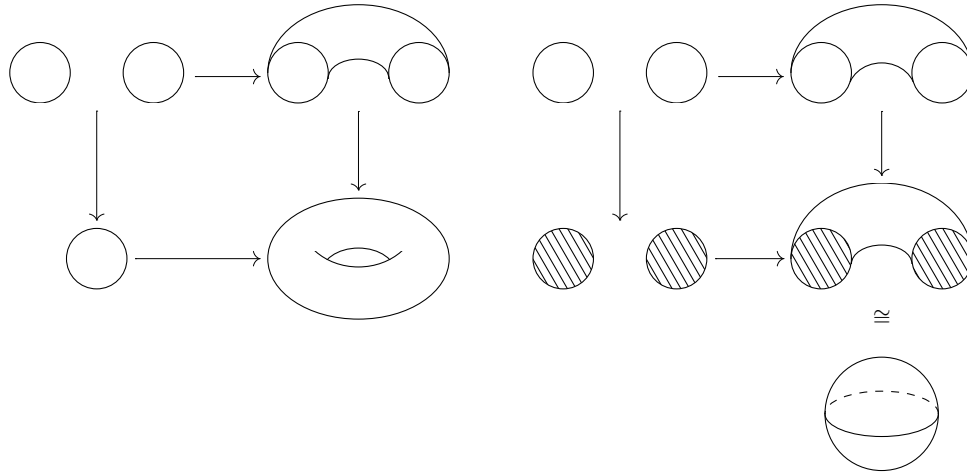
In dem Fall, dass N zwei Zusammenhangskomponenten N_1 und N_2 besitzt, gilt mit dem Satz von Seifert und van Kampen $\pi_1(N) \cong \pi_1(N_1) * \pi_1(N_2)$. Im anderen Fall, wenn N nur eine Zusammenhangskomponente hat, geht M aus N hervor, indem man zwei disjunkt in den Rand von N eingebettete 2-Disks verklebt. Es kommt in der Fundamentalgruppe lediglich ein freier Erzeuger dazu, also $\pi_1(M) = \pi_1(N) * \mathbb{Z}$.

N hat wie M nur Randkomponenten vom Geschlecht ≥ 1 . Sind darunter immer noch komprimierbare Randkomponenten, wiederholen wir den Prozess mit N . Sollte N nicht irreduzibel sein, zerlegen wir vorher mit Hilfe der Primzerlegung $\pi_1(N)$ in ein freies Produkt von Fundamentalgruppen von irreduziblen 3-Mannigfaltigkeiten N_i (Lemma 4.3). Seien D_i^1, \dots, D_i^s die 3-Disks, an denen N_i in der Primzerlegung von N verklebt wird. Dann ist $N_i \setminus (\overset{\circ}{D}_i^1 \cup \dots \overset{\circ}{D}_i^s)$ eine Untermannigfaltigkeit von M und besitzt nach Lemma 4.9 eine Randkomponente vom Geschlecht ≥ 1 . Also besitzen alle N_i einen Rand, der sich darüber hinaus durch die Primzerlegung nicht verändert hat. Wir suchen uns in einem dieser Ränder einen neuen, in M nullhomotopen Weg γ , der uns wieder eine komprimierbare 2-Disk liefert, an der wir weiter auftrennen können.

Dieser Prozess muss irgendwann stoppen, wie man zum Beispiel mit Hilfe der Eulercharakteristik einsieht: Sei U eine offene Umgebung von γ in der Randfläche Q . Setze $X := \overline{\partial M \setminus U}$ und sei $\iota : S^1 \amalg S^1 \rightarrow X$ die Inklusion, die jeweils eine S^1 mit einem durch das Auftrennen an γ entstandenen Randkreis von X identifiziert. Der Übergang von M zu N wird auf dem Rand dann durch die folgenden beiden Pushouts beschrieben.

$$\begin{array}{ccc} S^1 \amalg S^1 & \xrightarrow{\iota} & X \\ \text{id} \amalg \text{id} \downarrow & & \downarrow \\ D^1 \amalg D^1 & \hookrightarrow & \partial M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} S^1 \amalg S^1 & \xrightarrow{\iota} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^1 \amalg D^1 & \hookrightarrow & \partial N \end{array}$$

Im Fall, dass M ein Volltorus ist, erhalten wir zum Beispiel folgendes Bild:



Für die Eulercharakteristik gilt damit

$$\begin{aligned} \chi(\partial M) &= \chi(D^1 \amalg D^1) + \chi(X) - \chi(S^1 \amalg S^1) \\ &= \chi(X) + 2 \\ &= \chi(S^1 \amalg S^1) + \chi(\partial N) - 2\chi(S^1) + 2 \\ &= \chi(\partial N) + 2. \end{aligned}$$

Die Eulercharakteristik wächst also mit jedem Schritt. Die einzige Möglichkeit, die einem Ende noch im Wege steht, ist, dass als Rand unendlich viele Kopien von S^2

entstehen. Wir betrachten dazu eine einzelne Zusammenhangskomponente K von ∂M , die wie oben beschrieben entlang eines einfach geschlossenen, nicht nullhomotopen Weges γ aufgeschnitten wird. Zerfällt K in zwei Zusammenhangskomponenten A und B , dann gilt $A \neq S^2 \neq B$, denn sonst wäre γ schon in K nullhomotop gewesen. Es gilt also $\chi(A), \chi(B) \leq 0$ und mit der oben berechneten Beziehung $\chi(A) + \chi(B) = \chi(Q) + 2$ folgt

$$\chi(K) < \chi(A), \chi(B) \leq 0.$$

Jede Komponente K von ∂M kann also höchstens in $2^{|\chi(K)|}$ -viele Zusammenhangskomponenten zerfallen, was also insgesamt endlich viele bleiben, da ∂M kompakt ist. \square

Abzählbare freie Gruppen erfüllen nach Lemma 3.14 $FICwF$ und mit *W9 ist $FICwF$ auch mit dem freien Produkt verträglich. Mit dem gerade bewiesenen Lemma 4.6 in Kombination mit Lemma 4.2 haben wir also für berandete 3-Mannigfaltigkeiten folgende Zwischentappe erreicht:

Etappe 3. *Gilt $FICwF$ für kompakte, irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten mit unkomprimierbarem Rand, dann gilt $FICwF$ für 3-Mannigfaltigkeiten mit Rand und für nicht-kompakte 3-Mannigfaltigkeiten.*

Sei also M eine kompakte, irreduzible 3-Mannigfaltigkeit mit unkomprimierbarem Rand. Da M irreduzibel ist, sind alle Randkomponenten Flächen vom Geschlecht ≥ 1 . Besitzt M eine Torusrandkomponente, greift folgendes Lemma:

Lemma 4.10 ([R1, Korollar 4.1]). *Sei M eine kompakte, irreduzible 3-Mannigfaltigkeit mit unkomprimierbarem Rand, der mindestens eine Torusrandkomponente besitzt. Dann wird $FICwF$ von $\pi_1(M)$ erfüllt.*

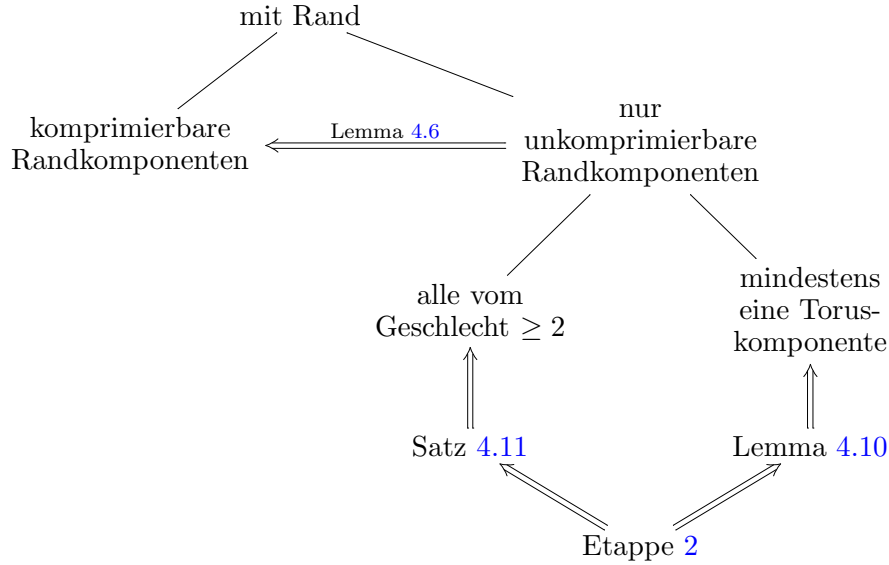
Beweis. Sei M' die Mannigfaltigkeit, die entsteht, wenn man M mit einer Kopie von sich selbst an den Randflächen vom Geschlecht ≥ 2 verklebt. Alle Randkomponenten von M' sind also unkomprimierbare Tori.

Ist M' atorisch können wir M' entlang der unkomprimierbaren Randtori zu einer geschlossen Haken-Mannigfaltigkeit M'' verdoppeln. Die Toruszerlegung von M'' enthält damit eine atorische Komponente und mit Etappe 2 wissen wir dann bereits, dass $FICwF$ gilt.

Andernfalls enthält M' einen unkomprimierbaren nicht-randparallelen Torus und ist damit eine Haken-Mannigfaltigkeit. Entweder enthält nun die Toruszerlegung von M' ein atorisches Stück und wir können analog zum vorherigen Fall M' zu M''

verdoppeln und sind mit Etappe 2 fertig oder M' ist eine Graph-Mannigfaltigkeit. Da M' einen Rand hat, können wir M' in diesem Fall nach [Le, Satz 3.2] mit einer nicht-positiven Metrik versehen, die auf dem Rand als Produkt gewählt werden kann. Wir können somit M' zu einer geschlossenen Mannigfaltigkeit mit nicht-positiver Metrik verdoppeln, so dass W2 greift. Wegen $\pi_1(M) \subset \pi_1(M') \subset \pi_1(M'')$ bekommen wir in allen Fällen mit Lemma 3.2 *FICwF* für $\pi_1(M)$. \square

Wir brauchen also, wie folgendes Diagramm verdeutlicht, nur noch kompakte, irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten mit unkomprimierbarem Rand, dessen Randkomponenten alle vom Geschlecht ≥ 2 sind, zu untersuchen.



4.3.1 B-Gruppen

Satz 4.11. *Sei M eine kompakte, irreduzible 3-Mannigfaltigkeit mit unkomprimierbarem Rand, deren Randkomponenten alle Flächen vom Geschlecht ≥ 2 sind. Dann ist *FICwF* wahr für M .*

In [R1] hat Roushon für Fundamentalgruppen solcher Mannigfaltigkeiten die Bezeichnung *B-Gruppe* eingeführt und in [R2] einen Beweis ausgeführt, dass für B-Gruppen *FICwF* gilt. Wir wollen den Beweis im Folgenden nachvollziehen. Die Grundidee besteht darin M mit einer Kopie zu einer geschlossenen Mannigfaltigkeit

zu verkleben und mit Hilfe der Toruszerlegung für die verdoppelte Mannigfaltigkeit $FICwF$ zu beweisen. Wir müssen dabei nur so geschickt verkleben, dass keine unkomprimierbaren Tori entstehen, die bei der Toruszerlegung die verklebten Randflächen von M zerschneiden, damit wir folgendes Lemma anwenden können:

Lemma 4.12. *Sei N eine geschlossene Haken-3-Mannigfaltigkeit. Besitzt die Toruszerlegung von N eine Komponente K , die eine unkomprimierbare, geschlossene Fläche F vom Geschlecht ≥ 2 enthält, dann wird $FICwF$ von N erfüllt.*

Beweis. Enthält die Toruszerlegung von N eine atorische Komponente oder besteht sie nur aus einer Komponente, die eine Seifert-Mannigfaltigkeit ist, wissen wir bereits mit Etappe 2, dass $FICwF$ für N gilt. Wir müssen deshalb lediglich den Fall ausschließen, dass N eine nicht-triviale Toruszerlegung besitzt, die nur aus Seifert-Komponenten besteht, also dass N eine nicht-triviale Graph-Mannigfaltigkeit ist.

Wir nehmen also an, N ist eine nicht-triviale Graph-Mannigfaltigkeit. Dann ist K eine Seifert-Komponente und besitzt, da die Toruszerlegung nicht trivial ist, einen nicht-leeren Torusrand. Die exakte Sequenz

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \pi_1(K) \xrightarrow{p} G \rightarrow 1,$$

die wir schon einmal im Beweis von Satz 4.5 betrachtet haben, liefert uns in diesem Fall, da K einen Rand hat, eine freie Untergruppe $G_1 \subset G$ mit endlichem Index in G (siehe Bemerkungen zu Theorem 12.2 in [H]). $p^{-1}(G_1)$ hat dann endlichen Index in $\pi_1(K)$. Betrachte die Konjugation

$$\begin{aligned} c : p^{-1}(G_1) &\rightarrow \text{Aut}(i(\mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}/2 \\ g &\mapsto (a \mapsto gag^{-1}) \end{aligned}$$

$i(\mathbb{Z})$ liegt im Zentrum von $\ker(c)$ und $R := \ker(c)/i(\mathbb{Z})$ ist als Untergruppe von G_1 frei. Es gilt damit $\ker(c) \cong \mathbb{Z} \times R$. F ist unkomprimierbar in K , es ist also $\pi_1(F)$ eine Untergruppe von $\pi_1(K)$. Da $\mathbb{Z} \times R$ endlichen Index in $\pi_1(K)$ hat, liegt $\mathbb{Z} \times R \cap \pi_1(F)$ mit endlichen Index in $\pi_1(F)$. Es gibt somit eine endliche Überlagerung \tilde{F} von F mit

$$\pi_1(\tilde{F}) = \mathbb{Z} \times R \cap \pi_1(F).$$

\tilde{F} ist selbst auch wieder eine geschlossene Fläche vom Geschlecht ≥ 2 . Das ist aber ein Widerspruch, wie wir gleich sehen werden, denn als Untergruppe von $\mathbb{Z} \times R$ kann $\mathbb{Z} \times R \cap \pi_1(F)$ keine Flächengruppe vom Geschlecht ≥ 2 sein.

Sei

$$f : \pi_1(\tilde{F}) \rightarrow \mathbb{Z} \times R, \quad g \mapsto (f_1(g), f_2(g))$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus. Da Untergruppen freier Gruppen wieder frei sind, $\pi_1(\tilde{F})$ aber nicht frei ist, kann $f_2 : \pi_1(\tilde{F}) \rightarrow R$ nicht injektiv sein. Da f aber injektiv ist, gibt es ein $x \in \pi_1(\tilde{F})$, $x \neq 1$ mit $x \in \ker(f_2)$ und $x \notin \ker(f_1)$. Also ist $x \in f^{-1}(\mathbb{Z} \times \{1\})$ und damit aus dem Zentrum $Z(\pi_1(\tilde{F}))$. Wähle ein Element $y \notin Z(\pi_1(\tilde{F}))$. Da x mit allen Elementen aus $\pi_1(\tilde{F})$ kommutiert, gilt für die von x und y erzeugte Gruppe

$$\langle x, y \rangle = \mathbb{Z}/m \times \mathbb{Z}/n \subset \pi_1(\tilde{F}).$$

$\langle x, y \rangle$ ist als Untergruppe von $\pi_1(\tilde{F})$ die Fundamentalgruppe einer Überlagerung T von \tilde{F} und damit selbst wieder Flächengruppe (ausführlicher bei [Sti, 4.3.7]). Die einzige Fläche mit abelscher Fundamentalgruppe mit zwei Erzeugern ist der Torus, es gilt also $n = m = 1$ und da der Torus kompakt ist, ist T eine endliche Überlagerung von \tilde{F} und damit $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ von endlichem Index in $\pi_1(\tilde{F})$. Jetzt haben wir den gesuchten Widerspruch, denn Untergruppen von Flächengruppen vom Geschlecht ≥ 2 mit endlichem Index sind selbst wieder Flächengruppen vom Geschlecht ≥ 2 ([HKS, Theorem 1]).

Den Fall, dass N eine nicht-triviale Graph-Mannigfaltigkeit ist, haben wir somit ausgeschlossen und für alle anderen Fälle hatten wir bereits gesehen, dass $FICwF$ gilt. \square

Bevor wir uns an den Beweis von Satz 4.11 machen, führen wir zur Fallunterscheidung folgende Definition ein.

Definition 4.13. Sei $A = S^1 \times [0, 1]$ ein Annulus. Wir nennen eine Mannigfaltigkeit M *geschlaucht*³, wenn es eine Einbettung $f : A \rightarrow M$ gibt, so dass gilt

1. $f(\partial A) \subset \partial M$,
2. f ist zu keiner Einbettung $g : A \rightarrow M$ mit $g(A) \subset \partial M$ isotop relativ zum Rand und
3. $f(A)$ ist in M unkomprimierbar, das heißt die von f induzierte Abbildung $\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(M)$ ist injektiv.

Einen in M eingebetteten Annulus, der obige Bedingungen erfüllt, nennen wir *Schlauch*.

³Eine etwas freie, aber anschauliche Übersetzung von *essential embedded annulus*. Es gibt allerdings auch Beispiele, bei denen die (zum Zylinder homöomorphe) Vorstellung einer eingebetteten Schallplatte näherliegender ist als die eines Schlauches.

Beweis von Satz 4.11. 1. Fall: M ist nicht geschlaucht.

Sei $N := M \cup_{\partial M} M$. Da der Rand von M unkomprimierbar ist, finden wir $\pi_1(M)$ als Untergruppe in $\pi_1(N)$. Mit Lemma 3.2 reicht es also *FICwF* für $\pi_1(N)$ zu zeigen. ∂M ist in N eine unkomprimierbare zweiseitige Fläche. Damit ist N also eine Haken-Mannigfaltigkeit. Die Toruszerlegung von N liefert uns eine endliche Menge \mathcal{T} von eingebetteten unkomprimierbaren Tori, die eindeutig sind bis auf Isotopie. Ist \mathcal{T} leer, haben wir mit Etappe 2 bereits *FICwF* für M gezeigt.

Wir wollen nun zeigen, dass es eine zu \mathcal{T} isotope Menge von Tori \mathcal{T}' gibt mit $\mathcal{T}' \cap \partial M = \emptyset$. Wir nehmen an $T \in \mathcal{T}$ sei ein Torus, der mit keiner Isotopie von ∂M getrennt werden kann. Wir finden auf jeden Fall einen zu T isotopen Torus T' , der ∂M transversal schneidet. $C = \partial M \cap T'$ ist eine Menge eindimensionaler geschlossener Mannigfaltigkeiten ([BJ, Satz 5.12]), also einfach geschlossene Wege auf ∂M , im Folgenden als Kreise bezeichnet. Wir wählen T' so, dass die Anzahl der Kreise in C minimal ist. Aufgrund folgender Überlegung können wir davon ausgehen, dass kein Kreis aus C eine 2-Disk auf T' berandet:

Sei γ ein Kreis auf ∂M , der eine 2-Disk D_1 auf $T' \setminus \partial M$ berandet. γ ist also in M nullhomotop. Da ∂M unkomprimierbar in M liegt, ist γ auch in ∂M nullhomotop und berandet eine 2-Disk $D_2 \subset \partial M$. $D_1 \cup D_2$ ist eine 2-Sphäre, die eine 3-Disk berandet, da M irreduzibel ist, das heißt die 2-Sphäre kann mit einer Isotopie über den Rand geschoben werden und im Widerspruch zur Wahl von T' haben wir einen zu T' isotopen Torus mit weniger Kreisen gefunden.

Da nach unserer Annahme $\mathcal{T}' \cap \partial M \neq \emptyset$ gilt und da $N \setminus \partial M$ nicht zusammenhängend ist, gibt es in C mehr als einen Kreis. Sei A eine Komponente von $\overline{T' \setminus C}$. Dann liegt A vollständig in einer der Kopien von M . $\partial A \subset C$ ist in T' nicht nullhomotop und damit finden wir $\pi_1(A)$ als nicht-triviale Untergruppe in $\pi_1(T') \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Flächen mit Rand haben freie Fundamentalgruppen, also bleibt lediglich die Möglichkeit $\pi_1(A) = \mathbb{Z}$. A ist somit ein Annulus, der wegen $\pi_1(A) \subset \pi_1(T') \subset \pi_1(M)$ unkomprimierbar in M ist und da es nach Annahme keine Isotopie gibt, die A über den Rand von M schieben kann, ist A auch nicht isotop relativ zum Rand zu ∂M . Im Widerspruch zur Voraussetzung haben wir also einen Schlauch in M gefunden.

Wir haben damit bewiesen, dass wir die Toruszerlegung von N so wählen können, dass dabei nicht der Rand von M zerlegt wird. Es gibt also eine Komponente in der Toruszerlegung, die eine vollständige Randkomponente von M enthält. Die Voraussetzung für Lemma 4.12 ist erfüllt und es gilt *FICwF* für $\pi_1(N)$.

2. Fall: *M ist geschlaucht.*

Roushon benötigt für seinen Beweis dieses Falles, die Voraussetzung, dass man in M eine maximale Menge von disjunkten Schläuchen findet, die eindeutig bis auf Isotopie sind. Die Existenz dieser Menge ist allerdings zweifelhaft. Wir gehen auf Roushons Beweis für diesen Fall später genauer ein und zeigen stattdessen erstmal einen alternativen Beweis auf, der diese Voraussetzung umgeht, aber sonst ähnlich funktioniert: Wir verdoppeln M mit Hilfe von geeigneten pseudo-Anosov-Diffeomorphismen auf den Randflächen, so dass aus den Schläuchen von M in der Verdopplung keine unkomprimierbaren Tori entstehen und wir wieder Lemma 4.12 anwenden können. An dieser Stelle möchte ich mich bei Thilo Kuessner bedanken, der mich auf den dafür entscheidenden Satz von Namazi und Souto aufmerksam gemacht hat.

Sei F eine unkomprimierbare Randfläche von M vom Geschlecht ≥ 2 . Da M Schläuche enthält, ist M insbesondere eine Haken-Mannigfaltigkeit. Sei K die Komponente der Toruserlegung von M die F enthält. Mit einer Randflächen vom Geschlecht ≥ 2 kann K keine Seifert-Mannigfaltigkeit sein, muss also atorisch sein.

Wir wollen auf K folgenden Satz von Namazi und Souto anwenden:

Satz 4.14 ([NaS, Theorem 5.1]). *Sei N eine kompakte, irreduzible, orientierbare 3-Mannigfaltigkeit, die keine $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -Untergruppe in ihrer Fundamentalgruppe hat und die eine Randfläche S vom Geschlecht ≥ 2 besitzt. Dann gibt es einen pseudo-Anosov-Diffeomorphismus f auf S , so dass $\tilde{N} = N \cup_f N$ eine negativ gekrümmte Metrik besitzt.*

K erfüllt bereits alle Voraussetzung, außer wenn die Toruserlegung von M nicht trivial ist. Dann findet man durch die unkomprimierbaren Torusränder $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in $\pi_1(K)$. Souto, darauf angesprochen, war davon überzeugt, dass der Beweis von Satz 4.14 in diesem Fall trotzdem durchgeht, da die $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -Untergruppen nur vom Rand kommen, aber wir können sie auch mit Hilfe von Dehn-Füllungen loswerden:

Als atorische Mannigfaltigkeit besitzt K eine geometrisch endliche, hyperbolische Metrik (siehe beispielsweise [Sco, §6]). Mit Theorem 7.3 von Bromberg [Br] können wir Volltori in die Torusränder einkleben, so dass die entstehende Mannigfaltigkeit immer noch hyperbolisch ist und damit $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nicht mehr als Untergruppe enthalten kann ([Sco, Lemma 4.5]). Jetzt liefert uns Satz 4.14 einen Diffeomorphismus f mit dem wir K zu $\tilde{K} := K \cup_f K$ verdoppeln können, so dass \tilde{K} eine negativ gekrümmte Metrik besitzt und somit atorisch ist ([CE, Korollar 9.9]). Mit Theorem 1.2.1 von Kojima [Ko] können wir aus \tilde{K} die eingeklebten Volltori so wieder herausnehmen, dass \tilde{K} weiterhin atorisch bleibt. F kann also in \tilde{K} von keinem Torus zerlegt werden.

Verdoppeln wir M und nutzen dabei für F den Diffeomorphismus f , erhalten wir eine geschlossene Mannigfaltigkeit, die die Voraussetzung von Lemma 4.12 erfüllt. \square

Für Roushons Beweis für den 2. Fall müssen wir etwas genauer auf pseudo-Anosov-Diffeomorphismen eingehen:

Sei S eine geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlecht ≥ 2 und sei $f : S \rightarrow S$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus. Nach Thurstons Klassifizierung von Diffeomorphismen auf Flächen (siehe beispielsweise [CB] oder explizit [Po, §V S.175]) besitzt f eine der drei folgenden Eigenschaften:

1. Es gibt eine natürliche Zahl $n > 0$, so dass f^n isotop zur Identität ist.
2. f ist isotop zu einem reduzierbaren Diffeomorphismus.
3. f ist isotop zu einem pseudo-Anosov-Diffeomorphismus,

wobei sich sowohl 1) und 3) als auch 2) und 3) gegenseitig ausschließen, d.h. ein pseudo-Anosov-Diffeomorphismus f ist weder reduzierbar noch ist eine Potenz von f isotop zur Identität. Ein Diffeomorphismus f heißt reduzierbar, wenn er eine endliche Menge \mathcal{A} von disjunkten, paarweise nicht homotopen und nicht nullhomotopen, einfach geschlossenen Wegen festhält, also $f(a) \in \mathcal{A}$ für alle $a \in \mathcal{A}$ gilt.

Wir interessieren uns für die 3. Kategorie. Dabei ist für uns unerheblich, was ein pseudo-Anosov-Diffeomorphismus ist. Entscheidend ist, was er nicht ist, nämlich reduzierbar und das gilt auch für eine beliebige Potenz. Ein Beweis dazu findet zum Beispiel bei Poénaru in [Po, §VI, Korollar von Proposition 17].

Mit Hilfe dieser Eigenschaft können wir folgendes Lemma beweisen.

Lemma 4.15. *Sei S eine geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlecht ≥ 2 und \mathcal{A} eine endliche Menge von disjunkten, paarweise nicht homotopen und nicht nullhomotopen, einfach geschlossenen Wegen. Sei $f : S \rightarrow S$ ein pseudo-Anosov-Diffeomorphismus. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass kein Element aus \mathcal{A} isotop zu einem Element aus $f^{n_0}(\mathcal{A})$ ist.*

Beweis. Sei $\mathcal{A} = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ und $l \in \{1, \dots, k\}$. Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ist $f^n(c_l)$ nicht isotop zu c_l , da sonst f^n reduzierbar wäre. Damit ist für beliebige $n, m \in \mathbb{N}$ auch $f^n(c_l)$ nicht isotop zu $f^m(c_l)$, da sonst $f^{|n-m|}$ reduzierbar wäre. Für jedes $c \in \mathcal{A}$ gibt es also höchstens ein $n \in \mathbb{N}$, für das $f^n(c_l)$ isotop zu c ist. Da \mathcal{A} endlich ist, gibt es ein $N_l \in \mathbb{N}$, so dass $f^s(c_l)$ für alle $s > N_l$ zu keinem $c \in \mathcal{A}$ isotop ist. Mit $n_0 = \max\{N_1, N_2, \dots, N_k\}$ haben wir den gesuchten Exponenten von f gefunden. \square

Entscheidend für Roushons Beweis ist die folgende Behauptung, die er in [R2, Remark 2.1.1] aufstellt. Er fordert darin nicht explizit die Disjunktheit, benötigt sie aber später im Beweis.

Behauptung 4.16. Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine maximale Menge $S = \{S_1, \dots, S_N\}$ von disjunkten Schläuchen in M , so dass jeder Schlauch T in M isotop zu einem Schlauch $S_i \in S$ ist.

Roushon verweist für den Beweis dieser Behauptung auf das Splitting Theorem von Jaco-Shalen ([JS]):

Satz 4.17 (Splitting Theorem). *Sei M eine kompakte, irreduzible Haken-Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine 2-dimensionale unkomprimierbare Untermannigfaltigkeit $W \subset M$, eindeutig bis auf ambiente Isotopie, mit folgenden drei Eigenschaften:*

1. *Die Komponenten von W sind Annuli und Tori und keine Komponente ist randparallel in M .*
2. *Die Komponenten sind entweder Seifert-Mannigfaltigkeiten oder atorisch und nicht geschlaucht, d.h. jeder unkomprimierbare Torus oder Annulus in W ist schon randparallel.*
3. *W ist minimal bezüglich aller Inklusionen von 2-Mannigfaltigkeiten in M , die die Eigenschaften (1) und (2) haben.*

Tatsächlich gibt es folgende, deutliche schwächere Aussage über maximale Mengen von Schläuchen, die auf Hakens Theorie der Normalflächen zurückgeht und auf der letztlich auch das Splitting Theorem beruht (siehe beispielsweise Satz III.24 von Jaco und Shalen ([Ja]) von allgemeinen Flächen auf den Spezialfall von Annuli eingeschränkt):

Satz 4.18. *Sei M eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit. Dann gibt es ein $N_0(M) \in \mathbb{N}$, so dass für $n > N_0(M)$ in jeder Menge $F := \{F_1, \dots, F_n\}$ von paarweise disjunkten, unkomprimierbaren, nicht randparallelen, in M eingebetteten Annuli bereits ein Annulus $F_i \in F$ existiert, der zu einem anderen Annulus $F_j \in F, j \neq i$ parallel ist.*

Die Menge von Schläuchen, die uns das Splitting Theorem liefert, können wir zwar mit Satz 4.18 zu einer maximalen Menge erweitern, aber im Allgemeinen nicht eindeutig bis auf Isotopie. Die Zerlegung entlang von Tori und Annuli ist gerade nur dann eindeutig, wenn man unter Berücksichtigung der charakteristischen Untermannigfaltigkeit rechtzeitig mit dem zerlegen aufhört. In der charakteristischen

Untermannigfaltigkeit findet man aber im Allgemeinen durchaus unterschiedliche, nicht disjunkte und nicht isotope Schläuche.

Gehen wir dennoch von der Existenz dieser maximalen Menge aus, können wir folgenden Beweis führen:

Roushons Beweis des 2.Falls von Satz 4.11. Seien $\partial_1, \dots, \partial_k$ die Komponenten von ∂M . Dann ist jedes der ∂_i eine geschlossene, orientierbare Fläche vom Geschlecht ≥ 2 . Nach Voraussetzung besitzt M mindestens einen Schlauch. Wir wählen nach Behauptung 4.16 die maximale Menge \mathcal{S} von Schläuchen in M , die uns eine Menge $\mathcal{A} := S \cap \partial M = \partial S$ von paarweise disjunkten und paarweise nicht homotopen, nicht nullhomotopen, einfach geschlossenen Wegen auf ∂M liefert. Sei $\mathcal{A}_i = \mathcal{A} \cap \partial_i$. Mit Lemma 4.15 finden wir für jedes $i = 1, \dots, k$ einen pseudo-Anosov-Diffeomorphismus $f_i : \partial_i \rightarrow \partial_i$, so dass $a \not\sim b$ für alle $a \in \mathcal{A}$ und alle $b \in f(\mathcal{A}_i)$ gilt.

Seien M^1 und M^2 Kopien von M und $N := M^1 \cup_{f_i} M^2$ die Verdopplung von M , die mit Hilfe der Diffeomorphismen f_i verklebt wurde. ∂M ist in N eine zweiseitige, unkomprimierbare Fläche. N ist also eine Haken-Mannigfaltigkeit und besitzt eine Toruszerlegung entlang von endlich vielen Tori \mathcal{T} . Ähnlich wie in Fall A wollen wir wieder eine Isotopie von \mathcal{T} finden, die ∂M nicht schneidet.

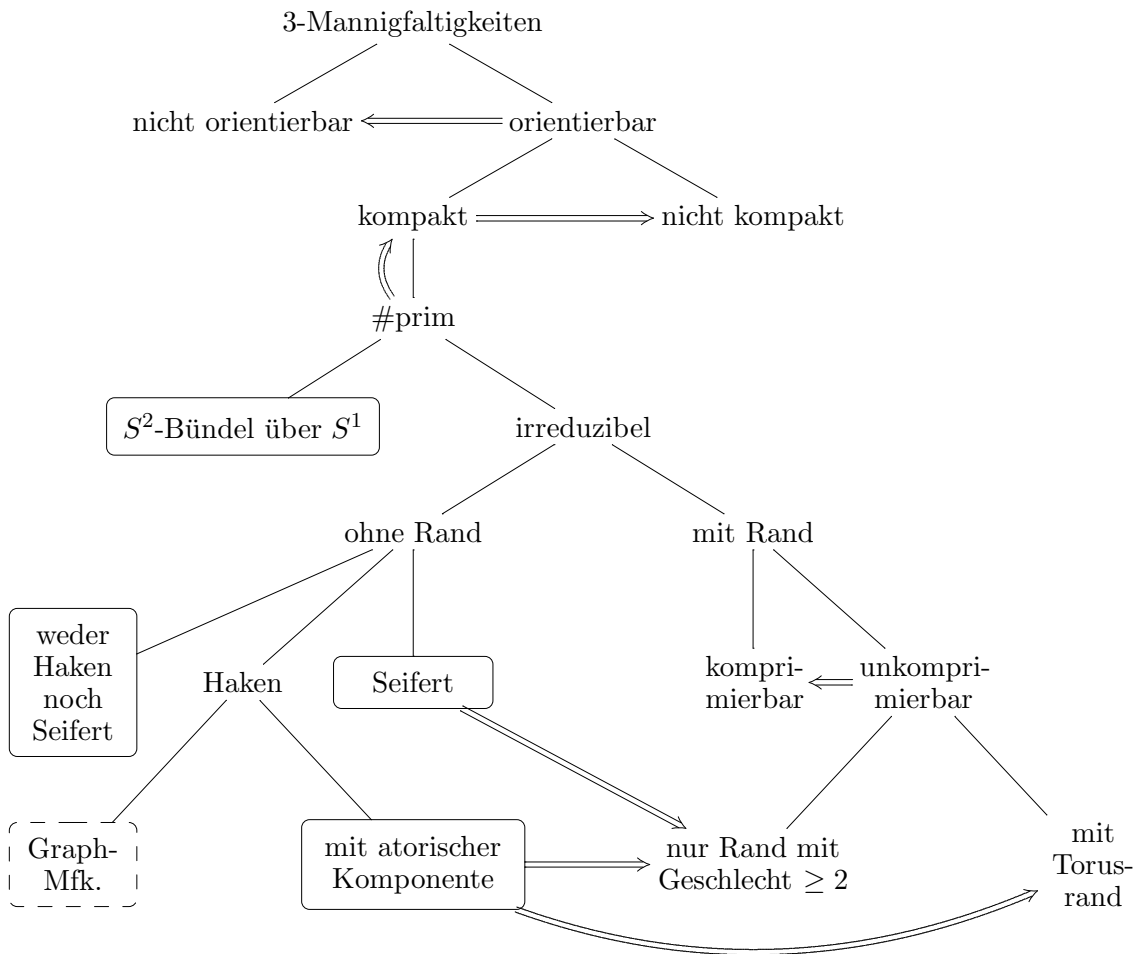
Wir nehmen an, es existiere ein Torus $T \in \mathcal{T}$, der sich durch keine Isotopie von ∂M trennen lässt. Analog zu Fall A, finden wir eine Isotopie von T' von T , so dass $T' \cap M^j$, $j = 1, 2$ nur aus Schläuchen besteht. Da \mathcal{S} bis auf Isotopie maximal gewählt war, ist $T \cap M^j$ isotop zu einer Teilmenge von \mathcal{S} und damit liefert $T \cap \partial M^j$ für $j = 1, 2$ Mengen \mathcal{A}^j von Wegen die homotop zu Teilmengen von \mathcal{A} sind. T geht aus den Schläuchen hervor, indem man die Randkomponenten \mathcal{A}^1 der Schläuche $T \cap M^1$ mit den Randkomponenten \mathcal{A}^2 der Schläuche $T \cap M^2$ mit den Diffeomorphismen f_i verklebt. Für $\gamma \in \mathcal{A}^1$ gilt also $f(\gamma) \in \mathcal{A}^2$, das heißt eine Teilmenge von \mathcal{A} ist isotop zu einer Teilmenge von $f_i(\mathcal{A})$ ist, was im Widerspruch zur Wahl der f_i steht.

Es gibt somit eine Isotopie \mathcal{T}' von \mathcal{T} mit $\mathcal{T}' \cap \partial = \emptyset$ und wir können Lemma 4.12 anwenden. $\pi_1(N)$ erfüllt damit *FICwF*. Da der Rand, entlang dem wir die Kopien von M zu N verklebt haben, unkomprimierbar ist, liegt $\pi_1(M)$ als Untergruppe in $\pi_1(N)$ und erfüllt damit nach Lemma 3.2 ebenfalls *FICwF*. \square

Mit der Arbeit von Neumann und Swarup ([NeS]) zur Toruszerlegung wird noch deutlicher, was das Problem dieses Beweises ist. Sie konstruieren eine Menge von unkomprimierbaren, disjunkten Annuli und Tori, die sie W-System nennen. Das W-System ist eine Obermenge der Tori und Annuli, die für die Zerlegung nach Jaco-Shalen und Johannson notwendig sind. Es besitzt darüber hinaus die Eigenschaft, dass jeder weitere unkomprimierbare Torus oder Annulus sich mit einer Isotopie

disjunkt von diesem W-System trennen lässt ([NeS, Lemma 2.2]). Diese zusätzlichen Annuli lassen sich untereinander aber im Allgemeinen nicht disjunkt trennen. Wir haben in dem Beweis Tori gewählt, die aus dem W-System von N stammen, aber die Annuli, in die diese Tori in M zerfallen, müssen nicht zum W-System von M gehören und damit auch nicht disjunkt trennbar sein.

Mit den Ergebnissen aus diesem Kapitel nimmt das Baumdiagramm nun folgende Gestalt an:

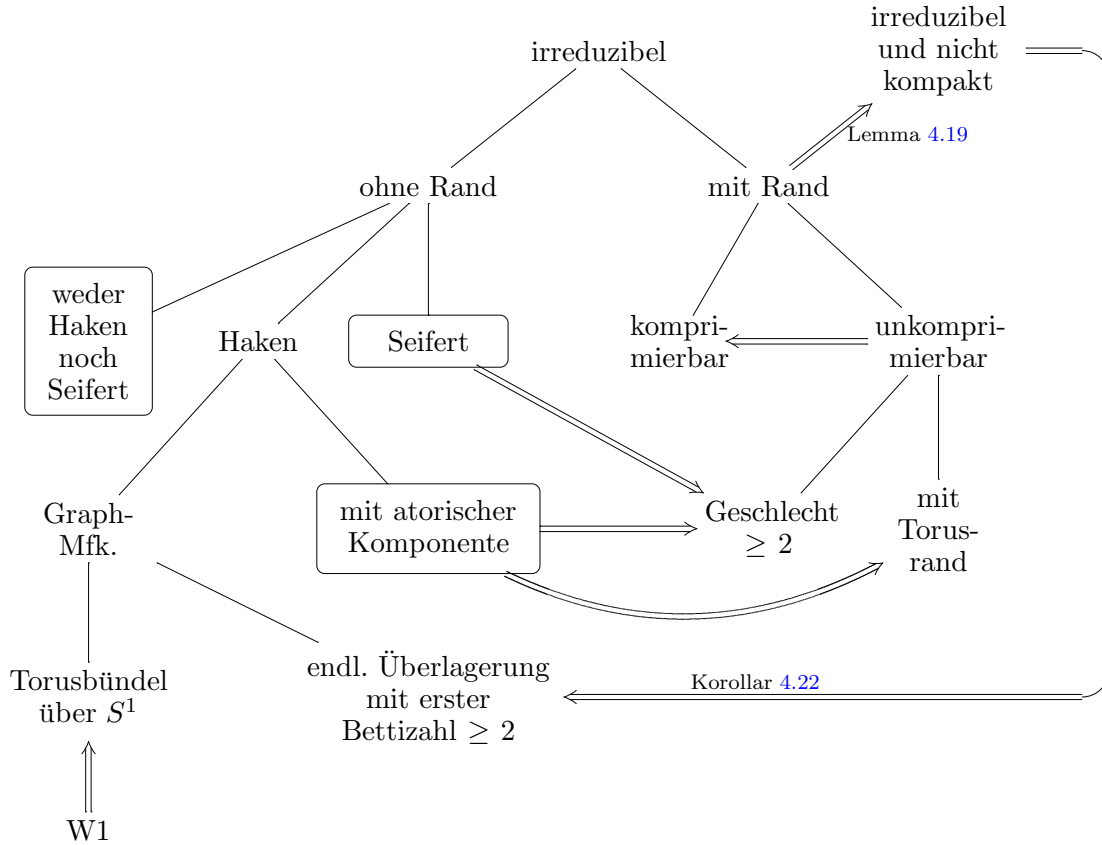


Mit den bereits erreichten Etappen 2 und 3 können wir somit festhalten:

Etappe 4. *FICwF ist wahr für geschlossene Haken-Mannigfaltigkeiten, für geschlossene Seifert-Mannigfaltigkeiten und für kompakte, irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten mit Rand. Gilt FICwF für geschlossene Graph-Mannigfaltigkeiten, dann gilt FICwF für beliebige 3-Mannigfaltigkeiten.*

4.4 Graph-Mannigfaltigkeiten-Ast

Jetzt fehlt uns also nur noch *FICwF* für geschlossene nicht-triviale Graph-Mannigfaltigkeitsgruppen. Der Schlüssel dazu, ist der Hauptsatz aus [R1]. Mit Korollar 4.22 erlaubt er uns unseren Beweisbaum auf folgende Weise zu vervollständigen:



Lemma 4.19. *Sei M eine irreduzible, nicht-kompakte 3-Mannigfaltigkeit. Dann gilt $FICwF$ für M .*

Beweis. Analog zu dem Beweis von Lemma 4.2 finden wir eine Folge von kompakten 3-Mannigfaltigkeiten M_i mit Rand, so dass $\pi_1(M) = \text{colim}_{i \in I} M_i$ gilt. Mit Lemma 4.3 können wir die M_i in zusammenhängende Summen zerlegen, so dass gilt

$$\pi_1(M_i) \cong \pi_1(M_i^1) * \dots * \pi_1(M_i^{k_i}) * F_i,$$

wobei alle M_i^j , $1 \leq j \leq k_i$ irreduzibel und kompakt sind. Wir nutzen ein Argument, dass wir schon im Beweis von Lemma 4.6 angewendet haben. In diesem Fall brauchen wir lediglich noch einen Index mehr:

Seien ${}^1D_i^j, \dots, {}^{n_{ji}}D_i^j$ die 3-Disks, an denen M_i^j in der Primzerlegung von M_i verklebt wird. Dann ist $M_i^j \setminus ({}^1\mathring{D}_i^j \cup \dots \cup {}^{n_{ji}}\mathring{D}_i^j)$ eine Untermannigfaltigkeit von M und besitzt nach Lemma 4.9 mindestens eine Randkomponente vom Geschlecht ≥ 1 . Damit haben alle M_i^j einen Rand. Mit Etappe 4 wissen wir bereits, dass $FICwF$ für irreduzible Mannigfaltigkeiten mit Rand gilt, also auch für alle M_i^j und damit auch für alle M_i und schließlich mit *W4 auch für M . \square

Satz 4.20 ([R1, Main Theorem]). *Sei M eine geschlossene, irreduzible 3-Mannigfaltigkeit. Gibt es eine Gruppe H mit einem surjektiven Gruppenhomomorphismus $p : \pi_1(M) \rightarrow H$ und folgenden Eigenschaften*

1. *H besitzt eine nicht-triviale, torsionsfreie Untergruppe mit endlichem Index.*
2. *H erfüllt $FICwF$.*
3. *Jede unendliche, zyklische Untergruppe von H hat unendlichen Index in H .*

Dann wird $FICwF$ von $\pi_1(M)$ erfüllt.

Bemerkung 4.21. Da H wegen der ersten Eigenschaft nicht endlich sein kann, ist die dritte Eigenschaft äquivalent zu der Forderung, dass H nicht virtuell zyklisch ist.

Beweis von Satz 4.20. Für eine Untergruppe L von $\pi_1(M)$ bezeichnen wir im Folgenden mit M_L die Überlagerung von M mit Fundamentalgruppe L . Hat L unendlichen Index, dann ist M_L eine nicht-kompakte 3-Mannigfaltigkeit.

1. Fall: *H ist torsionsfrei.*

Da $FICwF$ nach Voraussetzung von H erfüllt wird, reicht es aufgrund *W5 zu

zeigen, dass für jede virtuell zyklische Untergruppe V von H $FICwF$ für $p^{-1}(V)$ wahr ist. Da H torsionsfrei ist, ist auch V torsionsfrei und kann deshalb als virtuell zyklische Gruppe nur trivial oder isomorph zu \mathbb{Z} sein. Da H nicht virtuell zyklisch ist, muss $|H/V|$ unendlich sein. Sei $pr : H \rightarrow H/V$ die Projektion. Betrachte folgende Mengenabbildung:

$$\pi_1(M) \xrightarrow{p} H \xrightarrow{pr} H/V.$$

$pr \circ p$ ist surjektiv und es gilt $\ker(pr \circ p) = p^{-1}(V)$. V ist zwar nicht normal in H , so dass uns der Homomorphiesatz zwar keine Isomorphie- dafür aber noch die Mächtigkeitsaussage $|\pi_1(M)/p^{-1}(V)| = |H/V|$ liefert. $M_{p^{-1}(V)}$ ist damit nicht-kompakt. Als Überlagerung einer irreduziblen Mannigfaltigkeit, ist $M_{p^{-1}(V)}$ außerdem wieder irreduzibel ([MSY, Theorem 7]) und erfüllt somit $FICwF$ aufgrund von Lemma 4.19. Für jede beliebige virtuell zyklische Untergruppe V von H gilt also $FICwF$ für $\pi_1(M_{p^{-1}(V)}) = p^{-1}(V)$.

2. Fall: H ist nicht torsionsfrei.

Nach Voraussetzung existiert eine torsionsfreie Untergruppe J von H mit endlichem Index. Analog zum vorherigen Fall haben wir wieder eine surjektive Mengenabbildung

$$\pi_1(M) \xrightarrow{p} H \xrightarrow{pr} H/J,$$

zu der uns der Homomorphiesatz

$$|\pi_1(M)/p^{-1}(J)| = |H/J|$$

liefert. Die Überlagerung $M_{p^{-1}(J)}$ von M ist also endlich. Aufgrund von Korollar 3.10 brauchen wir $FICwF$ nur noch für $\pi_1(M_{p^{-1}(J)}) = p^{-1}(J)$ zu zeigen. Dafür ziehen wir uns einfach auf den vorherigen Fall zurück:

Wir haben mit p einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von $p^{-1}(J)$ auf J . Als torsionsfreie Gruppe ist J selbst eine torsionsfreie Untergruppe von J mit endlichem Index, als Untergruppe von H erfüllt J mit Lemma 3.2 $FICwF$ und weil J endlichen Index in H hat, überträgt sich die Eigenschaft von H , dass jede unendliche zyklische Untergruppe unendlichen Index hat, auf J . Die Voraussetzungen des Satzes werden also von J erfüllt. Da J torsionsfrei ist, können wir den ersten Fall dieses Beweises anwenden und wissen damit, dass $FICwF$ von $p^{-1}(J)$ erfüllt wird. Der Hauptsatz ist damit bewiesen. \square

Korollar 4.22. *Sei M eine geschlossene, irreduzible 3-Mannigfaltigkeit mit endlicher Überlagerung mit erster Bettizahl ≥ 2 . Dann gilt $FICwF$ für $\pi_1(M)$.*

Beweis. Sei N eine endliche Überlagerung von M mit erster Bettizahl ≥ 2 . Mit Korollar 3.10 reicht es $FICwF$ für $\pi_1(N)$ zu zeigen.

Sei $H := H_1(N; \mathbb{Z}) = \pi_1(N)/[\pi_1(N), \pi_1(N)]$. Wir prüfen nach, dass H alle Voraussetzungen des Hauptsatzes erfüllt. H ist eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, hat also die Gestalt $H = \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/k_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/k_n\mathbb{Z}$.

1. \mathbb{Z}^r ist eine torsionsfreie Untergruppe von H und $H/\mathbb{Z}^r \cong \mathbb{Z}/k_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/k_n\mathbb{Z}$ ist endlich.
2. H als abelsche Gruppe erfüllt nach Lemma 3.12 $FICwF$
3. Nach Voraussetzung ist $r \geq 2$ und damit hat jede unendliche zyklische Untergruppe von H unendlichen Index in H . \square

Satz 4.23. *Sei M eine geschlossene, irreduzible Graph-Mannigfaltigkeit. Dann ist $FICwF$ erfüllt für $\pi_1(M)$.*

Beweis. Eine triviale Graph-Mannigfaltigkeit ist eine Seifert-Mannigfaltigkeit, für die wir $FICwF$ bereits bewiesen haben (siehe Etappe 2). Sei M also eine nicht-triviale geschlossene Graph-Mannigfaltigkeit. Dann enthält M einen unkomprimierbaren Torus. Satz 1.1 aus [Lue] sagt uns, dass wir für M eine endliche Überlagerung N finden, die ein Torusbündel über S^1 ist oder die eine erste Bettizahl ≥ 2 hat. Gilt $FICwF$ für $\pi_1(N)$, dann überträgt sich $FICwF$ mit Korollar 3.10 auf $\pi_1(M)$. Im letzten Fall folgt $FICwF$ für $\pi_1(N)$ direkt aus Korollar 4.22.

Bleibt der Fall, dass N ein Torusbündel über S^1 ist. Für das triviale Torusbündel $(S^1 \times S^1) \times S^1$ ist $\pi_1(N) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ abelsch und erfüllt somit $FICwF$. Ein nicht triviales Torusbündel über S^1 hat die Gestalt $(T^1 \times [0, 1])/\sim_f$, wobei $f : T^1 \rightarrow T^1$ ein Homöomorphismus auf dem Torus ist und die Äquivalenzrelation \sim_f identifiziert $(x, 0)$ mit $(f(x), 1)$ für alle $x \in T^1$. Für die Fundamentalgruppe von N bekommen wir dann die Präsentation

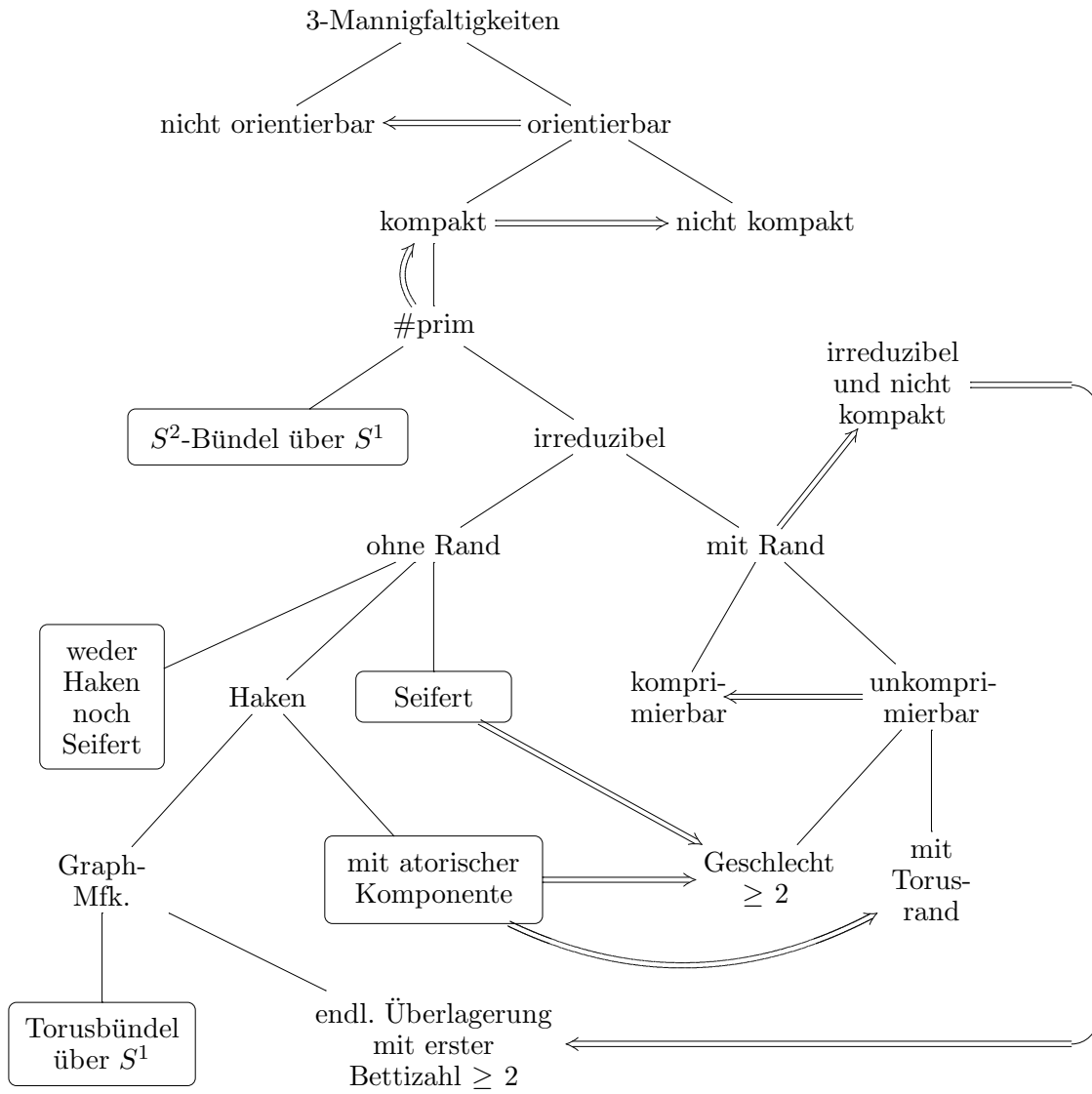
$$\pi_1(N) = \langle a, b, t; aba^{-1}b^{-1}, tat^{-1} = \pi_1(f)(a), tbt^{-1} = \pi_1(f)(b) \rangle.$$

Teilen wir $\langle a, b; aba^{-1}b^{-1} \rangle$ aus $\pi_1(N)$ heraus, erhalten wir folgende exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \langle a, b | aba^{-1}b^{-1} \rangle & \longrightarrow & \pi_1(T \times [0, 1])/\sim_f & \longrightarrow & \langle t \rangle \longrightarrow 1 \\ & & \Big| \cong & & \Big| \cong & & \Big| \cong \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \pi_1(N) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 1 \end{array}$$

Es gilt also $\pi_1(N) \cong \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}$, wofür wir mit W1 $FICwF$ gefordert hatten. \square

Damit hat unser FICwF-3-Mannigfaltigkeiten-Baum folgende Gestalt angenommen



und wir formulieren unseren

Schlussatz. *Sei $FICwF$ eine endlich erweiterbare, gefaserte Isomorphismusvermutung mit Werkzeugkasten. Dann gilt $FICwF$ für Fundamentalgruppen von 3-Mannigfaltigkeiten.*

Gilt $K-FICwF$ für Gruppen der Gestalt $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}$ und $K-FIC$ für $n \geq 1$ für Gruppen, die proper, kokompakt und isometrisch auf einem $CAT(0)$ -Raum operieren, dann gilt $K-FICwF$ für Fundamentalgruppen von 3-Mannigfaltigkeiten.

Gilt $L-FICwF$ für Gruppen der Gestalt $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}$ und $L-FIC$ für virtuell abelsche Gruppen, dann gilt $L-FICwF$ für Fundamentalgruppen von 3-Mannigfaltigkeiten.

A Werkzeugübersicht

Da wir sie häufig brauchen, geben wir zur Übersicht im Folgenden nochmal alle verwendeten Werkzeuge an:

- W1: $FICwF$ gilt für alle Gruppen der Gestalt $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}$.
- W2: $FICwF$ gilt für Fundamentalgruppen von nicht-positiv gekrümmten, geschlossenen Mannigfaltigkeiten.
- W3: FIC gilt für virtuell abelsche Gruppen.
- W4: Sei $\{G_i \mid i \in I\}$ ein gerichtetes System von Gruppen und für jedes G_i gelte FIC . Dann gilt FIC auch für $\text{colim}_{i \in I} G_i$.
- W5: Sei $p : L \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus und FIC gelte für G . Ist FIC wahr für $p^{-1}(V)$ für jede virtuell zyklische Untergruppe V von G , dann gilt FIC auch für L .
- *W3: $FICwF$ gilt für virtuell abelsche Gruppen.
- *W4: Sei $\{G_i \mid i \in I\}$ ein gerichtetes System von Gruppen und für jedes G_i gelte $FICwF$. Dann gilt $FICwF$ auch für $\text{colim}_{i \in I} G_i$.
- *W5: Sei $p : L \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus und $FICwF$ gelte für G . Ist $FICwF$ wahr für $p^{-1}(V)$ für jede virtuell zyklische Untergruppe V von G , dann gilt $FICwF$ auch für L .
- *W6: $FICwF$ gilt für endliche Gruppen.
- *W7: $FICwF$ gilt für abzählbare, freie Gruppen.
- *W8: Seien G_1 und G_2 Gruppen die $FICwF$ erfüllen. Dann gilt $FICwF$ auch für $G_1 \times G_2$.
- *W9: Seien G_1 und G_2 abzählbare Gruppen die $FICwF$ erfüllen. Dann gilt $FICwF$ auch für $G_1 * G_2$.

Literaturverzeichnis

- [BL] A. Bartels, W. Lück, Induction theorems and isomorphism conjectures for K- and L-Theory, *Forum Math.*, 19:379-406, 2007.
- [BLR] A. Bartels, W. Lück, H. Reich, On the Farrell-Jones Conjecture and its applications, *Jour. of Topology*, 1:57-86, 2008.
- [BEL] A. Bartels, S. Echterhoff, W. Lück, Inheritance of isomorphism conjectures under colimits, Preprintreihe SFB 478 - Geometrische Strukturen in der Mathematik, Heft 452, Münster, arXiv:math.KT/0702460, 2007.
- [Ba] G. Baumslag, *Topics in combinatorial group theory*, Lectures in mathematics ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 1993.
- [BJ] Th. Bröcker, K. Jänich, *Einführung in die Differentialtopologie*, Springer, Berlin, 1973.
- [Br] K. Bromberg, Hyperbolic Dehn surgery on geometrically infinite 3-manifolds, arXiv:math.GT/0009150, 2000.
- [CB] A.J. Casson, S.A. Bleiler, *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, London Mathematical Society Student Texts 9, Cambridge, 1988.
- [CE] J. Cheeger, D.G. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland Mathematical Library 9, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975.
- [DM] J.D. Dixon, B. Mortimer, *Permutation Groups*, Graduate texts in mathematics 163, Springer, 1996.
- [FJ] F.T. Farrell, L.E. Jones, Isomorphism conjectures in algebraic K-theory, *J. Amer. Math. Soc.*, 6:249-297, 1993.
- [H] J. Hempel, *3-manifolds*, Annals of Mathematics Studies 86, Princeton University Press, Princeton, 1976.

- [HKS] A.H.M. Hoare, A. Karrass, D. Solitar, Subgroups of finite index in Fuchsian groups, *Math. Zeit.*, 120:289-298, 1971.
- [Ja] W. Jaco, *Lectures on three-manifold topology*, Regional conference series in math. 43, Amer. Math. Soc., 1980.
- [JS] W. Jaco, P. Shalen, Seifert fibered spaces in 3-manifolds, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 220, 1979.
- [Jo] K. Johansson, *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundary*, Lecture Notes in Mathematics 761, Springer, Berlin, 1979.
- [Kn] H. Kneser, Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, *Jahresber. Deut. Math. Ver.*, 38:248-260, 1929.
- [Ko] S. Kojima, Deformations of hyperbolic 3-cone-manifolds, *Jour. Differential Geom.*, 49(3):469-516, 1998.
- [Le] B. Leeb, 3-manifolds with(out) metrics of nonpositive curvature, *Invent. Math.*, 122:277-289, 1995.
- [Lü] W. Lück, Survey on classifying spaces for families of subgroups, Preprintreihe SFB 478 - Geometrische Strukturen in der Mathematik, Heft 308, Münster, arXiv:math.GT/0312378, 2004.
- [LR] W. Lück, H. Reich, The Baum-Connes and the Farrell-Jones conjectures in K- and L-theory. *Handbook of K-theory. Vol. 2*, 703-842, Springer, Berlin, 2005.
- [Lue] J. Luecke, Finite covers of 3-manifolds containing essential tori, *Trans. of Amer. Math. Soc.*, 310:381-391, 1988.
- [MKS] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, *Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations*, Interscience Publishers, New York, 1966.
- [Mar] A. Martino, A proof that all Seifert 3-manifold groups and all virtual surface groups are virtually separable, *Jour. of Algebra*, 313:773-781, 2007.
- [Mas] W.S. Massey, *A basic course in algebraic topology*, Springer, New York, 1991.
- [MS] J.P. May, J. Sigurdsson, *Parametrized homotopy theory*, Mathematical surveys and monographs, vol. 132, American Math. Soc., 2006.

- [NaS] H. Namazi, J. Souto, Heegaard splittings and pseudo-Anosov maps, preprint, <http://www.math.princeton.edu/~hossein/contents/pseudo8.pdf>
- [NeS] W.D. Neumann, G.A. Swarup, Canonical decompositions of 3-manifolds, *Geometry & Topology*, 1:21-40, 1997.
- [MSY] W. Meeks III, L. Simon, S.-T. Yau, Embedded minimal surfaces, exotic spheres, and manifolds with positive Ricci curvature, *Ann. of Math.*, 116:621-659, 1982.
- [OVZ] P. Orlik, E. Vogt, H. Zieschang, Zur Topologie gefaserner dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten, *Topology*, 6:49-64, 1967.
- [Pa] C.D. Papakyriakopoulos, On solid tori, *Proc. London Math. Soc.*(3), 7:281-299, 1957.
- [Pe] G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, arXiv:math.DG/0211159, 2002
Ricci flow with surgery on three-manifolds, arXiv:math.DG/0303109, 2003
Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, arXiv:math.DG/0307245, 2003.
- [Po] V. Poénaru, Classification des difféomorphismes des surfaces. Travaux de Thurston sur les surfaces, *Astérisque*, 66-67:159-180, 1976.
- [Q] F. Quinn, Hyperbolic assembly for K-theory of virtually abelian groups, preprint, arXiv:math.KT/0509294, 2005.
- [R1] S.K. Roushon, The Farrell-Jones isomorphism conjecture for 3-manifold groups, *Jour. of K-theory*, 1(1):53-82, 2008. arXiv:math.KT/0405211, 2006.
- [R2] S.K. Roushon, The isomorphism conjecture for 3-manifold groups and K-theory of virtually poly-surface groups, *Jour. of K-theory*, 1(1):83-93, 2008. arXiv:math.KT/0408243, 2006.
- [Sco] P. Scott, The geometries of 3-manifolds, *Bull. London Math. Soc.*, 15:401-487, 1983.
- [Sei] H. Seifert, Topologie dreidimensionaler gefaserner Räume, *Acta Math.*, 60:147-238, 1933.
- [ST] H. Seifert, W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, Leipzig, 1934.

LITERATURVERZEICHNIS

- [Ser] J.-P. Serre, *Trees*. Springer, Berlin, 1987.
- [Sta] J. Stallings, „On the loop theorem“, *Ann. of Math.*, 72:12-19, 1960.
- [Sti] J. Stillwell, *Classical topology and combinatorial group theory*, Springer, New York, 1993.